ВИЛЬЯМ КЛИФФОРД

ЗДРАВЫЙ СМЫСЛ ТОЧНЫХ НАУК

НАЧАЛО УЧЕНИЯ О ЧИСЛЕ и ПРОСТРАНСТВЕ

КУЛЬТУРНО-ПРОСВЕТИТЕЛЬНОЕ
КООПЕРАТИВНОЕ ТОВАРИЩЕСТВО
«НАЧАТКИ ЗНАНИЙ»
ПЕТРОГРАД

Вильям Клиффорд,

профессор математики и механики University College в Лондоне.

ЗДРАВЫЙ СМЫСЛ ТОЧНЫХ НАУК.

НАЧАЛА УЧЕНИЯ О ЧИСЛЕ И ПРОСТРАНСТВЕ.

С портретом автора, приложением очерка бикватернионов и 105 чертежами.

Ибо изучение начинается с ощущений, но каждое умственное отправление кончается делом... Если практический прием оказывается ошибочным даже после возможно точного изучения свойств, то чаще всего это бывает следствием того, что плохо были определены, плохо были измерены силы и действия тел. Но силы или действия тел ограничиваются и измеряются или расстояниями, представляющими части пространства, или минутами, представляющими части времени, или количеством материи, или преобладанием известного свойства. Если эти четыре предмета плохо исследованы и плохо взвешены, то науки могут быть прекрасны в теории, но будут бесполезны в практическом отношении. Этим четырем родам примеров, относящимся к исследуемому нами вопросу, мы дадим одно общее название математических примеров, или примеров меры.

BACON, *Novum Organum*, книга II, § XLIV.

Перевел с 5-го английского издания А. Р. КУЛИШЕР.

2-е ИЗДАНИЕ.

КУЛЬТУРНО-ПРОСВЕТИТЕЛЬНОЕ
КООПЕРАТИВНОЕ ТОВАРИЩЕСТВО
„НАЧАТКИ ЗНАНИЙ“
ПЕТРОГРАД—1922.

Р. Ц. № 1993 Тир. 3000.—1922.

Военная типография, Штаба Р.-К. К. А., (Площадь Урицкого, 10).

В. К. Клиффорд.

(1845—1879).

Предисловие.

Клиффорд скончался на острове Мадере в марте 1879 года. и лишь шесть лет спустя впервые появляется перед читателями настоящий посмертный труд. В нашем предисловии необходимо дать то или другое об'яснение этому запозданию.

Задуманное Клиффордом сочинение, по мысли автора, первоначально должно было называться: *„Начала математических знаний в изложении для не-математиков“* и состояло из шести глав: *Число*, *Пространство*, *Величина*, *Положение*, *Движение* и *Масса*. Из намеченного труда Клиффорд в 1875 году *продиктовал* сполна главы о числе и пространстве, первую часть главы о величине и несколько позже почти всю главу о движении. Первые две главы были впоследствии просмотрены Клиффордом в корректуре, но окончательно проредактированы им они никогда не были. Незадолго до смерти он выразил желание. чтобы эта книга вышла в свет не иначе, как после тщательной редакции. и чтобы она носила измененное название, а именно: *„Здравый смысл точных наук“*.

После смерти Клиффорда труд редактирования и дополнения книги был возложен на Р. Роу (R. C. Rowe), бывшего в то время профессором чистой математики в University College в Лондоне. Что профессор Роу вполне отдавал себе отчет в трудности. и в то же время важности взятой на себя задачи—убедительно доказывается тем временем и тем вниманием, какие он ей уделял. Если бы он был жив и мог бы завершить труд редактирования, то книга вышла, без сомнения, лучшей и более достойной Клиффорда, нежели теперь. После горестной для нас всех кончины профессора Роу (октябрь 1884 года), ко мне обратились издатели Кеган, Поль, Трюбнер и К° с просьбой взять на себя редакцию книги, оставшейся незаконченной. Не с легким сердцем, но с чувством серьезной ответственности я взял на себя редакцию работы двух лиц, пред научными заслугами которых я преклонялся, испытывая к ним лично глубочайшее уважение. Читатель, быть-может, лучше поймет мои затруднения, если я укажу точно, в каком состоянии находилось сочинение Клиффорда, когда оно было передано мне. Главы I и II, а именно *Пространство* и *Число*, половина главы III (*Величина*), тогда ошибочно названной главой IV, и глава V (*Движение*) были в корректурных листах. Из относящихся к этой корректуре рукописей в моем распоряжении было всего каких-нибудь шесть страниц, остальную же рукопись, в предположении, что она более не нужна, уничтожили раньше. О том, в какой мере содержание более поздних по времени корректурных листов отвечало тому, что было в свое время продиктовано Клиффордом, я мог судить только по нескольким страницам рукописи, находившимся в моем распоряжении. При редактировании первых двух глав, уже прочитанных самим Клиффордом, я вносил возможно меньше изменений, ограничиваясь прибавлением примечаний, где это казалось необходимым. Начиная же со страницы 78 и далее [1]), я, однако, ответствен за все чертежи (исключая трех, помещенных в главе V).

Рассмотрев весь материал, поступивший в мое распоряжение, и переговорив с мистрис Клиффорд, я пришел к заключению, что глава о величине была помещена ошибочно, в действительности же от середины главы III до конца главы V шли пробелы. Относительно того, как заполнить эти пробелы, я не имел определенных указаний; только после окончания моего труда нашелся первоначальный Клиффордов план книги. Это произошло слишком поздно для того, чтобы можно было самим планом воспользоваться, но зато, по крайней мере, подтверждалась правильность предположенного нами перераспределения глав.

За вторую половину главы III и за всю главу IV (страницы 95—150) ответствен я один: всем, что в них окажется ценным, я обязан Клиффорду, слабые же места или неясность внесены мной.

Что касается главы V, то тут моя задача ни в коем случае не была легче. Главу эту Клиффорд написал в то время, когда был очень занят своей теорией „график“ и не находил возможным сосредоточить свою мысль на чем-либо другом: местами глава эта была ясна и отчетлива, местами же была такова, что автор никогда не допустил бы появления ее в свет в таком виде. Я сознавал, что нельзя писать ее заново целиком, так как в таком случае сочинение потеряло бы право называться сочинением Клиффорда, но в то же время было необходимо внести значительные изменения; этим об'ясняется, почему мне пришлось проредактировать эту главу более обстоятельно, чем первые две. Результатами, я боюсь, многие будут неудовлетворены, но едва ли, однако, они будут лучше меня сознавать недостатки моей работы.

В защиту свою могу привести лишь условия, в которых я должен был работать. Еще несколько слов об этой главе. Мне казалось невозможным закончить рассуждение о движении, совершенно не затронув вопроса о массе и силе: я понимал, что кое-что надо прибавить. Но как выразить законы движения в той форме, которую одобрил бы Клиффорд, было для меня неразрешимой загадкой, потому что я не

[1]) 78-ая стр. русского текста соответствует той, которая указана в оригинале (*примеч. переводчика*).

знал, писал ли он что-либо по данному вопросу. В силу этого я высказал, хотя с большой нерешительностью, свои собственные взгляды; взгляды же эти сжато можно формулировать, как сильное желание видеть термины *материя* и *сила* (вместе с связанными с ними идеями) совершенно из'ятыми из научной терминологии, как сильное желание свести на деле всю динамику к кинематике. Я едва ли осмелился бы высказать эти взгляды, если бы недавно не узнал, что они находят себе серьезную поддержку (если оставить в стороне незначительные разногласия), в авторитетном мнении профессора Маха в Праге [1]). Но в то время, как я писал эти страницы, я пользовался также речью, произнесенной Клиффордом в Королевском Институте в 1873 году, краткий отчет о которой появился в Nature (10 июня 1880).

Там он заявляет, что ни один математик не в состоянии вложить какой-либо смысл в речи о материи, о силе, об инерции, о которых говорят ходячие учебники механики [2]). Этот отрывочный отчет с несомненностью доказывает, что у Клиффорда составились по вопросу о категориях материи и силы такие же ясные и оригинальные убеждения, как о всем, что он подвергал своему исследованию и разбирал. Но — увы!—идеи эти до нас не дошли!

В заключение я должен поблагодарить тех друзей, которые всегда были готовы помочь делом и советом. Без их помощи я не сделал бы и того малого, что удалось выполнить. Моим единственным желанием было бы дать публике, как можно быстрее, сочинение того, чья память будет чтиться всеми, кто испытывал на себе бодрящее влияние его мысли. Если бы это сочинение было напечатано, как отрывок, как того многие из нас желали, то оно никогда бы не дошло до тех, для кого предназначил его Клиффорд. Но так как труд Клиффорда завершен чужой рукой, то мы можем надеяться лишь на то, что он выполнит хотя бы небольшую часть службы, которую он бы сослужил, если бы автор был жив и мог бы опубликовать его сам.

University College, Лондон.
26 февраля 1885 г. *К. П.*

Третье издание этой книги представляет собой перепечатку первого издания с некоторыми поправками, которыми я обязан, главным образом, любезности читателей.

10 октября 1886 г. *К. П.*

---

[1]) См. его недавно появившуюся книгу: „Die Mechanik in ihrer Entwickelung" (Leipzig, 1883); имеется русский перевод: *Эрнст Мах, Механика,* перев. и редакц. проф. Н. А. Гезехуса. Спб., 1909.

[2]) Р. Текер (R. Tucker), который в поисках чего-либо по этому предмету, любезно пересмотрел записные книжки Клиффорда, прислал мне клочек бумаги с следующими написанными почерком Клиффорда словами: „Сила вовсе не факт, сила—это идея, воплощающая то, что приблизительно является фактом".

Предисловие переводчика.

Имя Клиффорда не безызвестно русскому читателю: в 1893 году в речах, посвященных памяти Н. И. Лобачевского, неоднократно, например, приводилась его характерная оценка трудов автора „Новых начал геометрии". Среди напряженной работы, Клиффорд находил также время для ознакомления широких кругов слушателей с своими взглядами, выполняя это в ряде богатых содержанием и удивительных по форме лекций.

К числу работ Клиффорда, доступных для не-специалистов, принадлежит и настоящее сочинение, посвященное вопросам точного знания. Появление этого сочинения Клиффорд очень желал, но оно вышло в свет лишь после его смерти, при чем пропуски в изложении были восстановлены профессором Карлом Пирсоном, которому принадлежит и последняя редакция этой книги.

Не имея возможности в кратком предисловии указать все те особенности книги, которые, казалось мне, делали перевод ее желательным [1]), я ограничусь лишь несколькими беглыми замечаниями.

Всюду, где речь идет о числе, в обычном или более широком смысле слова, о действиях над числами, об отношении двух чисел, о пропорциональности и различных других обобщениях, мы можем усмотреть родственность автора Гамильтону. У Гамильтона последней ступенью в развитии понятия об отношении является отношение двух векторов, приводящее к особому гиперкомплексному (многократно именованному) числу, называемому, в силу входящих в это число четырех разнородных единиц, четверкой или кватернионом. Клиффорд делает еще шаг вперед и приходит к отношению двух моторов, выражаемому изобретенными им бикватернионами [2]), об открытии которых будет ниже еще упомянуто несколько слов. Интерес к символическому исчислению, постоянно проявляемый Клиффордом, — этим исчислением он владел в совершенстве, — виден в ряде работ, в которых Клиффорд выказал себя тонким ценителем Грассмана и его „Учения о протяжении". В этом смысле показателем интереса автора к символическим методам могут служить все те параграфы настоящего элементарного сочинения, в которые автор нашел необходи-

[1]) Посильную характеристику творчества Клиффорда, как математика и мыслителя, я предполагаю дать в приложении к переводу его „Lectures and essays".

[2]) См. прилож. к наст. соч., стр. 325.

мым ввести изложение простейших свойств кватернионов [1]), и в частности то место, в котором приведен результат перемножения двух экстенсивных величин, раньше полученный Коши и Грассманом и послуживший Клиффорду исходным пунктом одной из его работ в области инвариантов.

Клиффорд был по преимуществу геометром. Девять десятых его исследований, говорит в своем введении к собранию математических работ Клиффорда Стефен Смит [2]), носят характер геометрический. Поэтому особый интерес приобретает его отношение к проблеме восприятия пространства и вытекающее отсюда изложение геометрии. В лекции о постулатах науки о пространстве он отмечает следующих четыре постулата, на которых, по его мнению, зиждется наше восприятие пространства: 1) непрерывность пространства, 2) его гомалоидность [3]), 3) подобие пространства самому себе, 4) возможность существования образов, подобных друг другу, но обладающих различными размерами. В этой же лекции Клиффорд дает справедливую упомянутую выше оценку заслуг Лобачевского, называя последнего Коперником геометрии. Второй постулат приводит Клиффорда к интересным соображениям относительно того, насколько мы правы, когда этот постулат принимаем за нечто реальное не только по отношению к ограниченной области, доступной для нас части пространства, но также по отношению ко всему пространству.

Здесь же высказывается автором чрезвычайно остроумное геометрическое об'яснение таких явлений природы, как теплота, электричество, свет и т. д., объяснение по своему существу не более метафизическое, чем все другие до сих пор высказанные гипотезы: против этой спекуляции уже высказывались, однако, серьезные возражения, на которых необходимо будет остановиться при более подробной оценке трудов английского мыслителя.

При помощи двух последних из четырех постулатов в настоящем сочинении разобраны свойства треугольников и кругов.

Беглый обзор нескольких параграфов этой книги можно закончить, обратив внимание читателя на то, как изложены у Клиффорда в настоящем элементарно написанном труде вопросы о характерных признаках формы тел, вопрос об измерении площадей, а также глава о движении. Читатель встречается попутно также с случаями, где теряет силу закон перестановительный. Отмеченные здесь вопросы, некоторые приемы изложения Клиффорда и его общие точки зрения могли бы оказаться, по мнению переводчика, в той или другой мере не безынтересными для преподавателя элементарной математики.

Остается упомянуть еще о приложении в конце книги о „Предварительном очерке бикватернионов“, мемуаре, занимаю-

---

1) См. стр. 233 наст. соч.
2) См. Mathematical papers of. W. Klifford [London, 1882].
3) См. стр. 250, 253, 256 наст. соч.

щем в английском издании работ автора всего 19 страниц, но вызвавшем впоследствии целую литературу в области механики и геометрии.

В механической части этот мемуар, являющийся развитием счисления Гамильтоновых кватернионов, примыкает к классическому сочинению Болла, к его „Теории винтов“ [1]), позволяющей с большой простотой и большим изяществом решать вопросы механики твердого тела и системы материальных точек [2]). С другой стороны, рассмотрение свойств бикватернионов привело Клиффорда к построению поверхности, которая по свойствам своим представляла из себя как бы цилиндр в эллиптическом пространстве, обладающий весьма примечательными свойствами (в частности, например, у него две оси вращения). Эта поверхность и аналогичные по свойствам поверхности вызвали ряд дальнейших исследований, в которых это так называемое Клиффордово пространство (в нем параллельные линии обладают свойствами отличными от свойств Евклидова пространства), рассматривалось с различных точек зрения [3]).

Мемуар, за исключением нескольких последних страниц, почти вполне доступен для читателя с небольшой математической подготовкой. Последние же страницы представляют более специальнмй интерес, ничего уже не прибавляя в смысле новых обобщений и могут быть при желании опущены. Мемуар этот даст читателю, помимо знакомства с вопросами, о которых мы уже сказали, еще два новых понятия— понятие о левом и правом векторе и понятие о сумме роторов, которая лишь в частном случае равна ротору, что служит явным отличием ее от суммы векторов, всегда оказывающейся равной тому или другому вектору.

В примечаниях нами даны взятые из Гамильтона и Болла определения встречающихся у нас понятий скаляра, тензора, а также винтов кинематического и силового.

В заключение считаю долгом выразить мою искреннюю благодарность за важные для меня указания при затруднениях, которые встречались при переводе, и библиографические справки—проф. Карлу Пирсону, любезно разрешившему мне перевод настоящего сочинения в той мере, в какой он мог это сделать, как редактор сочинения, и проф. А. В. Васильеву, весьма сочувственно отнесшемуся к самой мысли о переводе сочинения Клиффорда.

Переводчик.

---

[1]) Sir Robert Stawel Ball. A. Treatise on the theory of screws (Cambridge, 1900).

[2]) К бикватернионам, исходя из других соображений, нежели Клиффорд, пришел проф. А. П. Котельников, который изучил этого рода величины и их приложения, исследуя три типа бикватернионов, в зависимости от того или другого значения ω (бикватернионы эллиптический, параболический и гиперболический). См. А. П. Котельников. „Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике“. (Казань, 1895).

[3]) Элементарное исследование поверхности Клиффорда дано в соч. Р. Бонола. Неевклидова геометрия, прилож. II (Спб., 1910).

Предисловие переводчика ко второму изданию.

Книга Клиффорда со стороны некоторых особенностей ее содержания, связанных с творчеством этого выдающегося английского геометра, сжато охараитеризована в предисловиях редактора и переводчика, помещенных выше.

Идеям Клиффорда со времени выхода в свет русского издания „Здравого смысла точных наук“ посвящены отдельные страницы „Грамматики науки“ Карла Пирсона; они сослужили нам большую службу при выяснении некоторых трудных проблем учения о пространстве и связанных с ними приемов преподавания геометрии.

За этот период обнаружились вполне ценные дидактические особенности данного сочинения. Им пользовались не только ценители точного знания вообще, преподаватели математики в частности, но оно оказалось вполне доступно и для успевающих учеников.

Ряд глав служил предметом ученических рефератов, проходивших с большим под'емом и оживлением всего класса.

Особенно замечательным, однако, следует признать те страницы книги, на которые мы обратили особое внимание в предисловии к первому изданию и в нашей „Методике и дидактике геометрии“.

Мы говорим о той геометрической теории физических явлений, которая так парадоксально звучала в прежние годы.

Но теперь, по мере того, как теория относительности, подвергаясь всестороннему испытанию и совершенствованию, дала новое толкование миру физических явлений, можно с определенностью сказать, что Клиффордом была вполне отчетливо формулирована та концепция мира, которая является венцом теории относительности и более того им были предсказаны некоторые выводы теории относительности (замкнутости пространства).

Нам не приходилось, однако, нигде найти подтверждения этой мысли до тех пор, пока в сочинении Эудингтона „Пространство, время и материя“ [1]) мы не увидали нескольких глав, в которых „Здравый смысл точных наук“ трактуется с этой точки зрения. Более того, автор говорит об изумительной прозорливости Клиффорда, высказавшего

---

[1]) Eddington „Space, Fime, Gravitation“. Cambridge 1920.

свои соображения сорок лет тому назад, когда выдающиеся физики были заняты вихревой теорией.

Нельзя не упомянуть здесь и об одной из речей проф. А. В. Васильева, в которой обращено также особое внимание на эти соображения Клиффорда.

Мы убеждены, что второе издание книги найдет в наше время новые круги читателей, среди которых появятся, надо надеяться, и дальнейшие исследователи отмеченных выше привлекательных концепций.

Переводчик.

9 февраля 1922 г.

ГЛАВА I.

ЧИСЛО.

§ 1. Число не зависит от порядка счета.

Слово, поставленное в заголовке этой части книги, содержит в себе пять букв. Для того, чтобы определить, что букв пять, мы пересчитываем их, говоря: *ч*—одна буква, *и*—две, *с*—три буквы, *л*—четыре, *о*—пять букв. Выполняя этот процесс, мы берем букву за буквой, приставляя к ним последовательно пять слов, первых пять из того ряда слов, который имеется постоянно в нашем распоряжении, ряда названий чисел. Приложив эти пять слов по одному к каждой букве слова *число*, мы нашли, что последним из них было слово *пять*. В виду этого мы назвали всю совокупность букв именем пять.

Если бы мы тем же способом сосчитали буквы в слове „зависит", мы нашли бы, что последним из использованных нами для этой цели имен числительных было слово *восемь*; в силу этого мы скажем, что в слове „зависит" восемь букв.

Но тут возникает следующий вопрос. Пусть буквы слова *число* напечатаны на небольших дощечках, входящих в состав разборной азбуки; положим эти дощечки в мешок, встряхнем их, вынем и, разложив их в каком-либо ином, нежели раньше, порядке, пересчитаем снова. Мы найдем, что и теперь букв будет пять. Так, например, если они будут итти теперь в алфавитном порядке *и л о с ч* и мы отнесем к каждой из них одно из имен числительных, которыми мы пользовались раньше, то мы тем не менее найдем, что последним числительным будет слово „пять". В утверждении, что какая-либо группа вещей состоит из пяти вещей, кроется другое утверждение, а именно, что при счете букв слово „пять" будет последним из имен числительных, в каком бы порядке мы ни разместили эту группу для счета. Другими словами, *в любой совокупности вещей число их будет одним и тем же, в каком бы порядке мы вещи ни считали.*

На этом факте, отмеченном нами по отношению к частному случаю числа „пять", но верном по отношению ко всем числам, каковы бы они ни были, основывается вся наука о числе. Теперь пойдем далее и исследуем те теоремы, касающиеся чисел, которые могут быть выведены из только что высказанного положения.

§ 2. Сумма не зависит от порядка слагаемых.

Предположим, что у нас имеются две группы предметов; скажем, буквы слова „число“ и буквы слова „зависит“. Мы можем сосчитать эти группы отдельно; мы найдем, что им соответствуют числа пять и восемь. Сложим теперь их вместе, и мы получим, что сложная группа, которая таким путем образовалась, состоит из тринадцати букв.

Эту операцию соединения всех предметов в одну группу можно понимать как такую операцию, которую мы в состоянии выполнить по двум различным направлениям. Мы можем взять сначала пять предметов и сложить их в кучу, а затем прибавить к ним один за другим еще восемь предметов. Процесс счета, если он совершается в этом порядке, сводится к тому, что после слова „пять“ мы называем еще восемь других имен числительных. С другой стороны, мы можем взять сначала восемь предметов и сложить их в кучу, прибавляя затем к ним по одному пять остальных предметов. В этом случае процесс счета приводится к упоминанию после слова „восемь“ пяти следующих за ним имен числительных.

Но мы раньше заметили, что при счете какой-либо совокупности предметов мы приходим к одному и тому же числу, в каком бы порядке мы ни считали; отсюда следует, что число, которым мы заключаем счет, как относящееся к группе предметов в их совокупности, должно быть одним и тем же, каким из двух указанных процессов счета мы бы ни воспользовались. Число это называется *суммой* двух чисел 5 и 8; как мы видели, мы можем прийти к нему или при помощи первого процесса,—процесса прибавления восьми к пяти, или при помощи второго процесса, то-есть путем прибавления пяти к восьми.

Процесс сложения 5 с 8 обозначается сокращенно особым символом, впервые примененным Леонардо-да-Винчи, а именно, вместо латинского слова *plus* или русского *да* [*еще*] ставится небольшой мальтийский крест (+). Таким образом слова *пять да восемь* пишутся сокращенно так: 5 + 8. Мы пришли к выводу, что *пять да восемь дают то же число, что восемь да пять.* Чтобы записать все это положение сокращенно, необходимо располагать еще символом для слов *дают то же число, что.* Таким символом является знак = ; впервые он предложен был англичанином Робертом Рикордом. Итак, вывод, к которому мы пришли, может-быть, в конце-концов, записан так:

$$5+8=8+5.$$

Положение, записанное нами в этой символической форме, показывает, что сумма двух чисел 5 и 8 не зависит от порядка, в котором они друг к другу приложены. Но то, что подмечено теперь нами по отношению к частному случаю двух взятых нами чисел, сохраняет свою силу и по отношению ко всяким двум другим числам. вследствие основного нашего предложения, что число предметов в каждой группе не зависит от порядка их счета. Под суммой двух чисел мы подразумеваем число, к которому приходим, взяв группу предметов, соответствующую первому числу, и прибавив к ним один за другим предметы, входящие в состав группы, соответсвующей второму числу; равным образом, если нам это будет угодно, мы можем получить сумму другим путем, а именно, взяв группу предметов, соответствующих второму числу и прибавив к ним один за другим предметы, входящие в группу, соответствующую первому числу. В силу основного нашего предложения результаты этих операций должны быть одинаковы. Таким образом мы в праве сказать, что не только $5+8=8+5$, но что и $6+13=13+6$ и т. п., какие бы два числа мы ни взяли.

Положение это мы можем представить при помощи метода, предложенного Виетой[1]) и состоящего в том, что каждое число обозначается какой-нибудь буквой алфавита. Если мы будем писать a вместо первого числа в двух наших примерах или в другом каком-либо, а вместо второго числа b, то наша формула представится в следующем виде:

$$a+b=b+a.$$

Благодаря этому способу обозначения, наш вывод относится уже не только к каким-нибудь двум определенным числам, но вообще ко всяким двум числам. Такое пользование буквами a и b уподобляет их до некоторой степени тем наименованием, которые мы придаем различным предметам (примером чего может служить, скажем, слово *лошадь*). Когда мы говорим, что у лошади четыре ноги, утверждение это имеет силу по отношению ко всякой определенной произвольно выбранной нами лошади. Мы указываем таким образом, что у каждой лошади четыре ноги. Если же мы говорим, что „у лошади столько же ног, сколько и у осла“, мы уже говорим не об определенной лошади или об определенном осле, а о любом осле и любой лошади. Точно так же, утверждая, что $a+b=b+a$, мы говорим не о двух определенных числах, а вообще о всяких двух числах.

Мы можем распространить это правило на те случаи, когда чисел более, нежели два. Предположим, что мы прибавляем к сумме $a+b$ третье число c; у нас получится группа предметов, составившаяся благодаря соединению в одну группу трех отдельных групп. Число предметов, в ней заключающихся, получается путем сложения друг с другом чисел, отвечающих каждой из трех групп в отдельности. Число это, в силу основного нашего предположения, должно быть

---

[1]) Знаменитый французский математик (1540—1603).

одним и тем же, в каком бы порядке мы эти три группы ни соединяли, так как оно отвечает всегда одной и той же совокупности предметов, нами пересчитываемых.

Возьмем ли сперва группу, состоящую из a предметов, прибавим к ней один за другим b предметов, входящих в состав второй группы, а затем к этой сложной группе из $a+b$ предметов присоединим один за другим c предметов, образующих третью группу; возьмем ли мы группу c предметов, прибавим к ней группу, состоящую из b предметов, далее к образовавшейся сложной группе из $c+b$ предметов, приложим группу a предметов,—сумма в обоих случаях будет одна и та же. Этот результат мы можем записать в символической форме так: $a+b+c=c+b+a$; словами же можно выразить его следующим образом: *сумма трех чисел не зависит от порядка, в каком эти числа друг с другом складываются.*

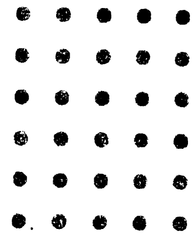
Закон этот может быть распространен на случай суммы скольких угодно чисел. Действительно, сколько бы групп предметов мы ни имели, раз мы их складываем все вместе, число предметов в конечной составленной из всех групп предметов мы можем определить, идя различными путями. Мы можем начать счет с одной из первоначальных групп, затем от нее перейти к какой-либо другой, потом от этой к одной из оставшихся и т. д. В каком бы порядке эти группы мы ни брали, заключительным процессом будет процесс установления числа предметов к группе, составленной из всех предметов в их совокупности, и вследствие этого числа, которые мы получаем, идя сказанными различными путями, должны быть одними и теми же.

§ 3. Произведение не зависит от порядка сомножителей.

Предположим, что у нас взято шесть групп предметов, из которых каждая состоит из одного и того же числа, скажем пяти, предметов; требуется определить число предметов в конечной сборной группе, которая получится при соединении всех предметов. Мы можем пересчитать эти шесть групп (из пяти предметов каждая) одну за другой, что равносильно операции, при которой мы к пяти прибавили бы пять, взятое пять раз. Мы можем также, если пожелаем, перемешать всю совокупность предметов, входящих в наши группы и затем пересчитать эти предметы, не обращая внимания на их первоначальную группировку. Но в данном случае представляет удобство для рассмотрения следующее особенное расположение этих шести групп из пяти предметов каждая.

Предположим, что все эти предметы—точки, поставленные на бумаге, что каждая группа из пяти предметов представлена пятью точками, распределенными по горизонтальной прямой, а шесть таких групп расположены соответственно одна под другой, как показано ниже.

Таким образом, наша совокупность точек, входящих в состав всех шести групп, размещена в один столбец, содержащий шесть рядов по пяти точек каждый. Под каждой из пяти точек, принадлежащих верхней группе, находится пять других точек, принадлежащих остальным группам. Другими словами, нашу совокупность точек можно рассматривать не только как шесть *рядов*, в каждом из которых заключается по пяти точек, но и как пять *столбцов*, содержащих по шести точек. Таким образом все точки могут быть размещены как в пять групп по шести точек каждая, так и в шесть групп по пяти точек. Все число предметов, заключающихся в шести группах по пяти предметов каждая, носит название: „шестью пять“, или „шесть раз пять“. Эти соображения приводят нас, следовательно, к тому, что „шестью пять“ есть то же число, что и „пятью шесть“.



Как и раньше, замечание, только что высказанное нами по отношению к двум определенным числам, может быть распространено на случай двух каких угодно чисел. Если мы возьмем любое число групп точек (при чем группы эти должны содержать по одному и тому же числу точек), развернем их в горизонтальные ряды и поместим ряды эти один над другим, то точки окажутся расположенными не только рядами, но и столбцами. Число точек в каждом столбце будет, очевидно, тем же, что и число групп, число же самых столбцов равно числу точек в каждой группе. Следовательно, число предметов, содержащихся в a группах, по b предметов каждая, равно числу предметов, содержащихся в b группах, по a предметов каждая, независимо от значений чисел a и b.

Число предметов, заключающихся в a группах, по b предметов каждая, именуется *произведением* a на b; мы видим отсюда, что произведение a на b равно произведению b на a. Число это (произведение a на b) обозначается поставленными рядом двумя буквами a и b, при чем сначала пишут a, потом b. Таким образом мы можем выразить наш результат в следующей символической форме: $ab = ba$.

Допустим, что нам теперь надо сложить вместе семь групп, сложенных в форме прямоугольника, подобных тем группам, которые мы только что образовали. Представить эту совокупность точек на листе бумаги теперь нельзя. Мы можем, однако, предположить, что у нас имеются вместо точек небольшие кубики, которые можно уложить в прямоугольной формы ящик. На дне ящика у нас окажется слой из шести рядов кубиков по пяти кубиков каждый, или, иначе, из пяти столбцов кубиков, по шести кубиков каждый; таких слоев у нас будет уложено один над другим семь. Таким образом над каждым кубиком, лежащим на дне ящика, будет столбец из шести других кубиков; всего таких столбцов будет пятью шесть. Другими словами, у нас будет пятью шесть групп. по семи кубиков каждая, или иначе семью пять групп, по шести кубиков каждая. Общее число кубиков не зависит от порядка их счета, и, следовательно, мы можем сказать, что семь раз пятью шесть будет тем же числом, что и пятью шесть раз семь.

Чрезвычайно важно теперь отметить то обстоятельство, что, когда мы говорим семь раз пятью шесть, мы имеем в виду, что у нас образовано семь слоев, каждый из которых содержит по пятью шесть предметов; когда же мы говорим пятью шесть раз семь, мы подразумеваем под этим, что у нас получились колонны числом пятью шесть, и что каждая из них содержит по семи кубиков. Теперь ясно, что в одном случае мы сперва перемножили два последних числа, а затем результат умножили на первое из упомянутых чисел (семь раз пятью шесть = семь раз тридцать); в другом же случае сперва перемножены два первых числа из трех названных, и затем на этот результат умножено третье (пятью шесть раз взятое семь = тридцати раз взятым семи). Совершенно ясно, что ящик, наполненный такими кубиками, мы можем положить на любой бок; во всех случаях получится то или другое число слоев кубиков, а именно либо 5, либо 6, либо 7. Каково число слоев, таково будет и число кубиков в каждом столбце. Поэтому, возьмем ли мы семь слоев, содержащих по пятью шесть кубиков каждый, или шесть слоев по семью пять кубиков или, наконец, пять слоев по шестью семь кубиков каждый, результат получится совершенно один и тот же.

Мы можем обозначить число пятью шесть символом 5×6, а пять раз шестью семь символом $5 \times 6 \times 7$.

Но эта форма не говорит нам ничего о том, должны ли мы сначала перемножить шесть и семь, и результат умножить на пять, или же сперва перемножить 5 и 6, и взять столько раз по семи, сколько у нас после этого перемножения получилось. Различие между этими двумя операциями может быть отмечено при помощи скобок; таким образом $5 \times (6 \times 7)$ обозначает, что надо сперва перемножить 6 и 7 и этот результат взять пять раз, в то время как смысл $(5 \times 6) \times 7$—тот, что должны быть перемножены 5 и 6, и затем взято столько раз по семи, сколько покажет полученный результат.

Теперь мы можем установить следующих два наблюденных нами в области умножения факта.

Во-первых, то обстоятельство, что скобки не вносят никаких изменений в результат умножения, хотя и изменяют ход процесса, при помощи которого этот результат получен; другими словами, $5 \times (6 \times 7) = (5 \times 6) \times 7$.

Во-вторых, то положение, что произведение этих трех чисел не зависит от порядка, в котором они перемножаются.

Первое из этих положений называется *распределительным законом* умножения, а второе—*перестановительным законом.*

Замечания эти, сделанные нами в применении к результату перемножения трех определенных чисел 5, 6 и 7, применимы в равной мере к произведению трех каких угодно чисел.

Мы всегда можем представить себе ящик, сделанный так, что его высота, длина и ширина отвечают трем каким бы то ни было числам кубиков. Общее число всех кубиков, как это ясно, не зависит от положения ящика; тем не менее, стоит положить ящик определенным образом, и мы получим в нем известное число слоев; которые будут содержать по известному числу рядов, при чем в каждом ряде будет определенное число кубиков. Вся совокупность кубиков в ящике выразится произведением этих трех чисел; получить это произведение можно, взяв два каких-либо числа из этих трех, перемножив их между собой и умножив затем результат на третье число.

Это свойство трех произвольных чисел может быть теперь выражено символически.

Прежде всего верно то, что $a(bc)=(ab)c$; другими словами, мы приходим к одному и тому же результату, как при умножении произведения второго и третьего числа на первое число, так и при умножении третьего числа на произведение первых двух.

Далее затем верно, что $abc=acb=bca$ и т д.; мы можем сказать, что произведение трех каких-либо чисел не зависит от порядка и группировки, согласно которым умножение выполнялось.

Мы сделали, таким образом, сходные заключения относительно произведений двух и трех чисел. Это, естественно, наталкивает нас на мысль о том, что мы должны решить, нельзя ли высказать подобные заключения также относительно произведений четырех и пяти чисел и т. д.

Указанные два заключения добыты нами при помощи рассмотрения всей совокупности подлежащих счету предметов, путем предварительного расположения их для одного случая в виде слоя, для другого—внутри ящика. Не представляется ли возможным итти дальше и так сопоставить несколько ящиков, чтобы выразить при помощи их произведение четырех чисел? Совершенно ясно, что этого сделать мы не можем.

Посмотрим поэтому, нельзя ли при помощи какого-либо другого приема удостовериться рассуждением в том, что положение, правильность которого мы наблюдали в случае трех чисел (результат умножения не зависит от порядка, в котором числа перемножались), сохраняет свое значение для четырех и более чисел.

Покажем сначала, что можно изменить порядок в одной паре чисел, что можно переставить два числа, стоящие рядом в процессе умножения, не изменяя при этом самого произведения.

Рассмотрим, например, произведение четырех чисел $abcd$. Мы попытаемся показать, что это произведение представляет собой то же число, что и произведение $acbd$. Смысл символа $abcd$ тот, что мы должны взять c групп по d предметов, далее затем b групп, подобных только что образованной совокупности, и, наконец, a групп, состоящих из bcd предметов.

Но, согласно положению, уже нами доказанному, b групп по cd предметов каждая, приводят нас к тому же числу, что и c групп по bd предметов. Отсюда следует, что a групп по bcd предметов дают то же число, что и a групп по cbd предметов; другими словами, $abcd = acbd$.

Совершенно ясно, что это рассуждение сохранит свою силу, сколько бы букв после d у нас ни было. Предположим, например, что нам дано произведение шести чисел $abcdef$. Произведение это показывает, что мы должны f умножить на e, полученный результат на d, def на c и т. д.

В нашем случае произведение def попросту занимает место, принадлежавшее в предыдущем случае d. И b групп по c взятым def предметам соответствует тому же числу, что и c групп по b раз взятым def предметам: речь идет здесь лишь о произведении трех чисел b, c и def. Так как в силу этого результат получится один и тот же, в каком бы порядке b и c ни были написаны, последующие операции умножения не могут внести никаких изменений, если после умножения на a нам пришлось бы умножать на эту совокупность чисел. Отсюда следует, что независимо оттого, сколько у нас перемножаемых чисел, мы в праве переставить два числа, стоящие рядом: при этом произведение по величине не изменится.

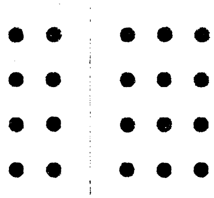
Докажем теперь, что мы можем переставить также два числа, не стоящие непосредственно друг около друга. Докажем, например, что $abcdef$ то же число, что и $aecdbf$ (здесь переставлены b и e). Установить тождественность этих двух чисел можно так: пусть e будет перемещаться назад, меняясь последовательно местами с d, c и b, благодаря чему наше произведение превратится в $aebcdf$; затем заставим передвигаться вперед b, меняясь местами последовательно с c и d; таким образом вместо b будет теперь стоять e. Теперь я уже утверждаю, что перестановками, подобными только что выполненным, мы можем осуществить какое угодно изменение в порядке перемножаемых чисел. Предположим, например, что мне надо изменить $abcdef$ в $dcfbea$. С этой целью я прежде всего поставлю вначале d; меняя места d и a, получаю $dbcaef$. Далее затем требуется, чтобы c было вторым; я достигаю этого, переставив c и b, что дает $dcbaef$. Я должен теперь поместить третьим, считая от начала, f; путем перестановки f и b получаю $acfaeb$, ставлю теперь b на четвертом месте, перемещая b и a, что дает $dcfbea$. Это и есть та форма произведения, которая была нужна. При помощи, самое большее, пяти таких перестановок я могу изменить как угодно порядок шести букв. Уже доказано, что это изменение порядка букв может быть выполнено путем последовательных перемещений двух букв, стоящих рядом. Но перемещения эти, как мы раньше показали, не изменяют величины произведения; следовательно, произведение шести чисел, идущих в каком-либо порядке, равно произведению тех же шести чисел, взятых в каком угодно другом порядке. Легко видеть, что тот же процесс можно применить к любому произведению чисел, сколько бы их ни было.

Но не будут ли все эти рассуждения делом слишком хлопотливым по сравнению с целью, т.-е. с доказательством того положения, которое мы могли отгадать наперед? Действительно, мы могли бы угадать наперед, что произведение не зависит от порядка и группировки его сомножителей, и мы поступили бы совершенно правильно, вскрыв все последствия нашей догадки до того, как убедились бы вполне в ее безошибочности. Много прекрасных теорем было отгадано, и ими широко пользовались тогда, когда они еще не были доказаны в окончательной форме. Некоторые теоремы и по сей день занимают в науке такое место. Но рано или поздно приходится предпринять их исследование; исследование это не только всегда проясняет наше понимание характера теоремы, но, помимо того, дает нам право сказать, что эта теорема верна. Это еще не все. В большинстве случаев самый способ доказательства или исследования может быть применен к другим вопросам таким образом, что в результате мы достигнем расширения наших знаний. Сказанное имеет место и по отношению к доказательству, только что нами проведенному. Но так как в данную минуту мы имеем дело лишь с числами, в приложениях этого доказательства мы можем итти только назад, а не вперед. Мы провели рассуждение применительно к умножению; посмотрим, в праве ли мы применить то же рассуждение по отношению к сложению.

Доказанное нами положение сводится к следующему. Известный результат был добыт при помощи рассмотрения некоторой группы предметов, взятых в определенном порядке; было показано, что *если мы можем переставить два предмета, расположенных один за другим, не изменяя при этом результата, то мы можем изменить порядок предметов как нам угодно, также не изменяя результата.* Приложим это положение к счету. Процесс счета состоит в том, что мы берем известные предметы в определенном порядке и прикладываем к ним один за другим наши пальцы; результат зависит оттого, какой палец будет последним. Число пальцев и будет числом сосчитанных таким образом предметов. Мы видим отсюда, что этот результат не будет зависеть от порядка счета при том только условии, что он не претерпевает изменения при перестановке двух идущих один за другим предметов; другими словами, при условии, что два смежных пальца могут быть заложены один за другой, так что каждый остается на своем предмете, при чем не приходится ни пользоваться новыми пальцами, ни оставлять без употребления те, которыми мы уже воспользовались. При таком допущении мы можем *доказать*, что число предметов, принадлежащих к какой-либо совокупности предметов, не зависит от порядка счета. Положение это, как мы видели, является основанием науки о числе.

§ 4. Закон распределительный.

Существует еще другой закон умножения, который, если только это возможно, еще более важен, нежели те два, которые мы уже рассмотрели. Вот один из частных случаев его применения: число 5 представляет собой сумму 2 и 3; четырежды 5 равняется сумме четырежды 2-х и четырежды 3-х. Мы можем сделать это предложение очевидным при помощи следующего расположения точек:



У нас имеется четыре ряда по пяти точек каждый; каждый ряд разделен на две части, при чем в одной из них две точки, в другой—три. Ясно, что вся совокупность точек может быть сосчитана одним из двух способов. Ее можно рассматривать, с одной стороны, как группу из четырех рядов по пяти точек каждый, или же как комбинацию из четырех рядов по две точки и четырех рядов по три точки. Согласно общему нашему принципу, результат не зависит от порядка счета, а потому

$$4 \times 5 = (4 \times 2) + (4 \times 3);$$

или же, выражая 5 в форме $5 = 2 + 3$, имеем

$$4(2 + 3) = (4 \times 2) + (4 \times 3).$$

Этот процесс, очевидно, применим к каким угодно трем числам, а не только к частному случаю 4, 2, 3. Мы можем построить столбец, содержащий a рядов по $b + c$ точек; при помощи вертикальной линии разделяем его на a рядов по b точек и a рядов по c точек. Сосчитанная одним способом вся совокупность представится числом $a(b + c)$, сосчитанная другим способом $ab + ac$. Отсюда мы будем иметь всегда $a(b + c) = ab + ac$.

Это *первая форма* распределительного закона. Но результат умножения не зависит от порядка сомножителей и потому

$$a(b + c) = (b + c)a$$
$$ab = ba$$
$$ac = ca;$$

таким образом наше равенство может быть написано в форме

$$(b+c)a=ba+ca,$$

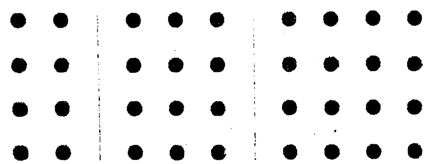
которая носит название *второй формы* распределительного закона.

Взяв числа нашего предыдущего примера, говорим: так как 5 является суммой 2 и 3, то 5 раз 4 равняется сумме дважды взятых 4 и трижды взятых 4. Выражение закона в этой форме можно получить прямо и чрезвычайно просто, прибегнув к следующему рассуждению.

Мы знаем, что 2 предмета да 3 предмета составляют 5 предметов, независимо оттого, каковы самые предметы. Пусть каждый из них представляет из себя, в свою очередь, группу 4 предметов. Тогда 2 группы по 4 и 3 группы по 4 составят 5 групп по 4, или

$$(2\times 4)+(3\times 4)=5\times 4.$$

Это правило можно распространить на более сложный случай. Наш прямоугольник, составленный из точек, можно, очевидно, разделить вертикальными прямыми на большее число частей, нежели две, и затем применить то же рассуждение, что и раньше.



Например, наша группировка 36 точек (см. выше) устанавливает с очевидностью следующий факт: если 2, 3 и 4 составляют 9, то 4-жды 2, 4-жды 3 и 4-жды 4 составляют 4-жды 9 или, вообще говоря,

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad,$$
$$(b+c+d)a=ba+ca+da.$$

То же рассуждение можно применить к сумме любого числа чисел, помножаемой затем на новое число.

§ 5. О степенях.

Когда мы умножаем число само на себя, говорят, что мы *возвышаем его в квадрат.* Такое название этой операции дают потому, что если расположить известное число рядов точек, равно отстоящих друг от друга, в прямоугольник, подобный приведенным выше, то, при равенстве числа рядов числу точек в каждом ряде, прямоугольник превратится в квадрат.

Если квадрат какого-либо числа умножают на это же самое число, то говорят, что число *возвышают в куб.* Действительно, если ящик наполнить кубиками, укладывая по высоте, по длине и ширине одинаковое число их, то это возможно тогда, когда ящик имеет форму куба.

Если мы перемножим четыре равных числа, то получим то, что называется четвертой степенью. Таким образом, если мы перемножим 4 тройки, то получим 81; если перемножим 4 двойки, получим 16.

Если мы перемножим любое число равных чисел, то, как и выше, получим ту или другую степень одного из этих чисел, которая будет называться пятой, шестой, седьмой и т. п. степенью, в зависимости оттого, сколько чисел было перемножено.

Ниже приводим таблицу степеней чисел: 2 и 3.

Показатель	1	2	3	4	5	6	7	8
Степени 2	2	4	8	16	32	64	128	256
„ 3	3	9	27	81	243	729	2187	6561

Число равных сомножителей носит название *показателя*; изображается он небольшой цифрой, поставленной над строчкой справа от числа, степень которого желают таким путем выразить. Для того, чтобы кратко изобразить, что произведение семи троек дает 2187, необходимо написать только следующее:

$$3^7 = 2187.$$

Следует заметить, что каждое число является своей *первой степенью*; таким образом $2^1 = 2$; $3^1 = 3$ и, вообще говоря, $a^1 = a$.

§ 6. Квадрат числа (a + 1).

Мы можем иллюстрировать свойства квадратов чисел, воспользовавшись общеизвестной арифметической игрой, состоящей в том, что одно лицо отгадывает число, задуманное другим, получая это число, как результат ряда выполненных над ним вычислений. Игра эта состоит в следующем:

Задумайте число . . . . скажем	3.
Возвысьте его в квадрат . . . . получим	9.
Прибавьте 1 к первоначальному числу	4.
Возвысьте в квадрат получившееся число	16.
Найдите разность между этими двумя квадратами . .	7.

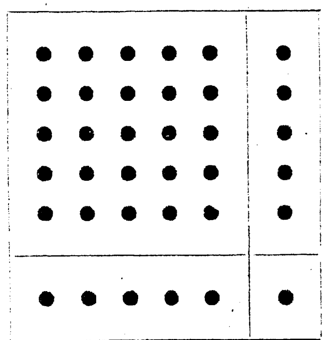
Последняя разность будет всегда числом нечетным, задуманное число равняется, если можно так выразиться, *„меньшей половине“* ее; мы хотим этим сказать, что оно равно половине ближайшего к полученной разнице четного числа, меньшего ее. Так как полученный нами результат равен 7, то мы узнаем, что задуманное число равно половине 6, т.-е. 3.

Для вывода правила продолжим наше исследование. Допустим, что квадрат 5 дан нам в виде двадцати пяти точек, расположенных в форме квадрата. Каким образом отсюда мы могли бы перейти к квадрату 6? Для этого нам надо было бы прибавить пять точек справа, 5 точек внизу и, сверх того, одну точку в углу. Т.-е., для получения квадрата 6 из квадрата 5 мы должны прибавить к этому последнему, кроме дважды взятых 5, еще единицу. Таким образом

$$36 = 25 + 10 + 1.$$

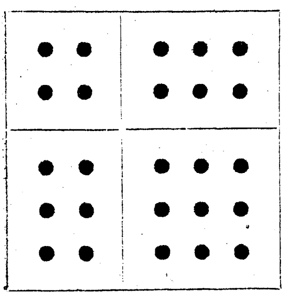
Обратно, число 5 является „меньшей половиной" разности между его квадратом и квадратом 6.

Характер этого рассуждения показывает, что оно сохраняет свою силу по отношению к любому числу. Если нам дан квадрат, составленный из точек, мы можем превратить его в квадрат, стороны которого имеют одной точкой больше, нежели стороны данного. Для этого необходимо прибавить колонку точек справа, ряд точек внизу, и, сверх того, одну точку в углу.



Иначе говоря, мы должны прибавить одной точкой больше, нежели сколько их содержится в удвоенной стороне первоначального квадрата. Поэтому, если нам дана такая разность, достаточно отнять от нее единицу и остаток разделить на два для того, чтобы получить число точек, содержащихся в стороне первоначального квадрата.

Теперь запишем этот результат сокращенно. Пусть первоначально данным числом будет a; тогда $a + 1$ будет ближайшим по отношению к нему большим числом; нам необходимо теперь указать, что квадрат $a + 1$, т.-е. $(a + 1)^2$, получается из квадрата a, т.-е. a^2, путем прибавления к последнему увеличенного на единицу удвоенного a, или $2a + 1$. Таким образом сокращенное выражение этого соотношения представится в виде



$$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1.$$

Эта теорема является частным случаем более общей теоремы, дающей нам возможность найти квадрат суммы двух каких-либо чисел по данным квадратам тех же чисел и их произведению. Мы поясним сперва эту теорему на примере квадрата пяти, представляющих сумму 2 и 3.

Квадрат, представленный двадцатью пятью точками, разбит на два квадрата и два прямоугольника. Квадраты соответствуют квадрату 2 и 3, а каждый из прямоугольников — произведению 3 на 2.

Для того, чтобы превратить квадрат трех в квадрат пяти, необходимо прибавить к нему два столбца справа, два ряда внизу и, наконец, квадрат двух в углу. Действительно,

$$25 = 9 + 2 \times 6 + 4.$$

§ 7. О степенях числа (a + b).

Чтобы сообщить это предложение, предположим, что у нас имеется квадрат, стороны которого содержат по a точек. Мы должны теперь прибавить b столбцов справа, b рядов внизу и квадрат b в углу. Но каждый столбец и каждый ряд содержат по a точек. Итак, то, что мы должны прибавить, представляет собою сумму удвоенного ab и b^2, или, записывая результат, так сказать, стенографически, имеем:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Теорему, выведенную нами предварительно, мы можем получить отсюда, полагая $b = 1$.

Мы имеем совершенно законченное и достаточное доказательство нашего предложения; тем не менее мы намерены доказать его еще раз другим способом, что вызывает у нас потребность в его дальнейшем расширении. Нам надо найти выражение не одного только квадрата $(a + b)$, но и любой другой степени этой суммы в степенях и произведениях a и b. Способ доказательства, каким мы пользовались до сих пор, для этой цели непригоден. Правда, мы можем отыскать куб $(a + b)$, прибавляя соответственные части к кубу a, но это было бы довольно затруднительно. Что же касается высших степеней, то при нахождении их пользоваться такими представлениями уже невозможно. Доказательство, к которому мы теперь переходим, основывается на применении распределительного закона умножения.

Действительно, согласно этому закону, имеем

$$(a + b)^2 = (a + b)\quad(a + b) = a\quad(a + b) + b\quad(a + b) = aa + ab + ba + \\ + bb = a^2 + 2ab + b^2.$$

Представляется поучительным выписать на ряду с сокращенной записью наше положение в развернутом виде, а именно: квадрат суммы двух чисел означает то, что эта сумма умножена сама на себя; произведение это есть не что иное, как результат сложения первого числа, помноженного на нашу сумму со вторым числом, помноженным на ту же сумму; далее, первое число, будучи умножено на нашу сумму, дает произведение первого числа на самого себя, сложенное с произведением первого числа на второе; второе число, будучи умножено на сумму обоих чисел, дает произведение второго числа на первое, сложенное с произведением второго числа на самого себя.

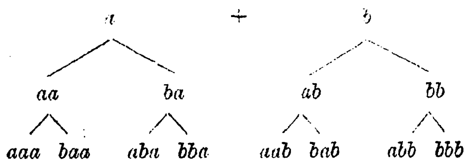
Складывая все эти произведения, находим, что квадрат суммы двух чисел равен сумме квадратов этих чисел, сложенной с удвоенным их произведением.

При сопоставлении обоих способов записи мы можем отметить следующие два обстоятельства: во-первых, то, насколько выигрывает сокращенная запись в ясности, именно в силу своей краткости; а во-вторых, что вся сокращенная запись передает лишь то, что совершенно и безраздельно лежит в области здравого смысла. Мы можем всегда исходить из того положения, что алгебра, которой нельзя перевести на язык родной страны и здравого смысла —, плохая алгебра.

Изобразим теперь этот процесс графически; такая форма записи позволит нам расширить применение процесса. Мы начинаем с двух чисел a и b; каждое из них мы должны умножить на a и на b, и полученные результаты сложить.

Каждый раз результаты, получаемые от умножения на a и на b, будем писать под числом, которое умножаем; первый результат будем писать слева, второй—справа. Процесс этот показан на нашей диаграмме (см. выше).

Если требуется полученное произведение умножить снова на $a+b$, что даст нам $(a+b)^3$, то для этого мы должны умножить каждую из частей произведения, находящуюся на нижней строке, на a, а также на b и сложить все результаты. Тогда будем иметь такую диаграмму:



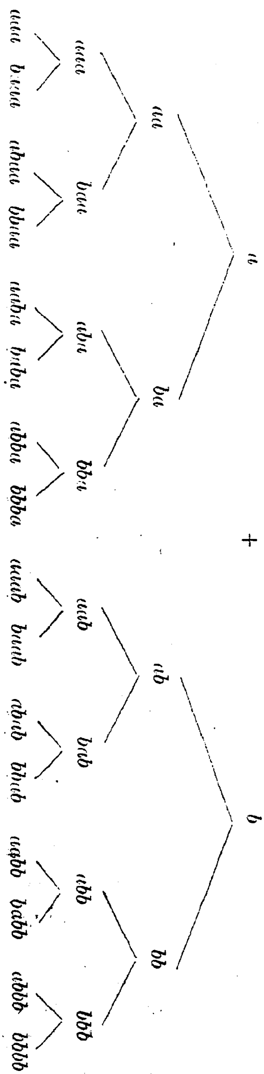
Всего отдельных частей (членов) получилось восемь. Первая из них есть a^3, последняя b^3; из остальных шести — три соответственно равны baa, aba и aab; в каждой из них по два множителя a и по одному b, каждая, следовательно, равна a^2b; три другие части представлены произведениями bba, bab, abb; каждая содержит по одному множителю a и по два множителя b; каждая из них поэтому равна ab^2. Итак,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Например, $11^3 = 1331$; в данном случае $a = 10$; $b = 1$; $(10+1)^3 = 10^3 + 3 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$, так как любая степень 1, очевидно, равна также 1.

Прежде чем высказать замечания, которые позволят нам в дальнейшем обходиться без описанного графического приема, мы продлим его еще на одну ступень.

В этом случае у нас получится шестнадцать членов. Первый из них равен a^4, последний b^4. Из остальных членов одни будут содержать по три множителя a и по одному b, другие — по два a и по два b, третьи — по одному a и по три b. Членов первой категории у нас образуется четыре, так как b может занимать в группе четырех сомножителей первое, второе, третье или четвертое место. Равным образом получится четыре члена третьей категории: в них a будет занимать те же места, что b в членах первой категории. Остальные шесть членов войдут во вторую категорию. Итак, в конце-концов, будем иметь:



$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Этот процесс мы могли бы продолжить как угодно далеко, и на наших диаграммах получались бы все более и более значительные разветвления. Легко, однако, видеть, что классификация и подсчет членов, получающихся в последней строке, становился бы при этом, чем далее, тем затруднительнее. Попробуем избегнуть этих затруднений воспользовавшись тем, что нам даст рассмотрение нашего процесса.

Если мы будем спускаться вниз по ветвям дерева нашей последней диаграммы от a к $abaa$, то найдем, что член $abaa$ при этом строится справа налево. В самом деле, число a, с которого мы начинаем, есть в то же время последняя буква произведения $abaa$; спускаясь и двигаясь вправо, мы прибавляем к первому a другое a; далее мы перемещаемся влево и помещаем впереди группы aa число b; наконец, мы движемся вправо и ставим впереди a.

Из только что сказанного можно вывести два следующих заключения:

Во-первых, *все члены, к которым мы приходим в конце процесса, различны*, так как каждое расхождение в путях, по которым мы перемещаемся, идя по ветвям диаграммы, сказывается в виде изменения той или другой буквы результата.

Во-вторых, *при этом получаются всевозможные группы (соединения) четырех букв, составленные из a и b*. Действительно, раз у нас написана одна из таких групп, скажем $abab$, достаточно прочесть ее с конца, придавая числу a смысл слов „поверни налево“, а числу b смысл „поверни направо“, и мы найдем путь, которому мы должны следовать, идя по дереву диаграммы, чтобы прийти к помещающейся на краю его нашей группировке.

Эти два соображения мы можем соединить в одно, сказав, что *каждая из подобных возможных группировок будет осуществлена один раз и только один раз.*

Задача, которую нам надлежит решить, состоит в подсчете членов, имеющих то или другое число сомножителей b. Согласно только что высказанному соображению, задача эта сводится к счету возможных соединений, заключающих одно и то же число отдельных b.

Рассмотрим, например, члены, содержащие один множитель b. Если в каждом члене три буквы, то всего возможных соединений будет также три, так как b может занимать в такой группе первое, второе или третье место, а именно baa, aba, aab. Равным образом при четырех буквах всех соединений, имеющих одно b, будет 4, так как b может занимать первое, второе, третье или четвертое место: $baaa$, $abaa$, $aaba$, $aaab$.

Вообще говоря, сколько будет сомножителей в каждом члене, столько, очевидно, будет и мест, на каких может стоять b. Или, выражая то же положение сокращенно, найдем, что при числе букв n будет n членов, содержащих по одному b. Разумеется, точно так же будет n членов, содержащих по одному множителю a, при прочих сомножителях, равных b.

Эти-то члены будут стоять в начале и конце n-ной степени $(a+b)$; а именно, мы получаем: $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b +$ ряд других членов $+ nab^{n-1} + b^n$.

Эта сокращенная запись показывает, что у нас перемножено n множителей, каждый из которых равен $a+b$, и что в результате этого умножения получается сумма различных чисел, при чем четыре из них нами выписаны. Первый—произведение n сомножителей, равных a или a^n; следующий за ним—n раз взятое произведение b на $(n-1)$ сомножителей, равных a. Предпоследний n раз взятое произведение a на $(n-1)$ сомножителей, равных b; и, наконец, последний—произведение n множителей, равных b, которое написано в виде b^n.

Чтобы довести задачу до конца, остается дополнить сказанное выяснением значений ряда „других членов“, содержащих более, чем по одному множителю a и более, чем по одному b.

§ 8. О числе размещений для данной группы букв.

Эта задача принадлежит области той весьма полезной ветви прикладной арифметики, которая называется *теорией перестановок и сочетаний*. При помощи этой теории мы узнаем, сколько размещений можно сделать из данной совокупности предметов и сколько сочетаний может быть образовано из таких размещений. Оба эти вопроса друг с другом связаны. Представляется поэтому выгодным прежде всего подсчитать число размещений.

При двух данных буквах может быть получено, очевидно, два размещения *ab* и *ba*. При трех буквах размещений будет шесть

abc, *acb*, *bca*, *bac*, *cab*, *cba*,

а именно, два, начинающихся с *a*, два, начинающихся с *b* и два, начинающихся с *c*; итого числом трижды два. Не представляет большого труда выписать все размещения, какие можно образовать из четырех букв *abcd*. Но мы можем и без этого определить число размещений из четырех букв. Действительно, если приписать букву *d* вначале каждого из шести размещений, получаемых из *abc*, то мы получим шесть размещений из четырех букв, начинающихся с *d*, и, очевидно, других размещений, начинающихся с *d*, в данном случае быть не может. Равным образом может быть шесть размещений, начинающихся с *a*, шесть, начинающихся с *b*, и шесть, начинающихся с *c*; всего размещений будет четырежды шесть, то-есть *двадцать четыре*.

Сопоставим теперь эти результаты:

При двух буквах число размещений равно двум = 2.
„ трех „ „ „ трижды двум = 6.
„ четырех „ „ четыре раза трижды двум = 24.

Мы пришли теперь сразу к установлению некоторого правила, а именно: *чтобы найти число размещений, которые могут быть образованы из данной группы букв, надо перемножить числа* два, три, четыре, и т. д., *кончая числом букв, содержащихся в нашей группе*. Мы подтвердили верность этого правила для случая двух, трех и четырех букв, но сохранит ли оно свою силу при любом числе букв?

Рассмотрим следующий случай, случай пяти букв, применив к нему прием, каким мы в праве пользоваться во всех случаях.

Одну из пяти букв можно поставить на первом месте; таким образом представляется пять путей для замещения первого места. Идя тем или другим из таких путей, мы имеем каждый раз четыре различных способа для занятия второго места; в самом деле на втором месте может быть поставлена каждая из четырех остающихся букв. Итак, первых два места могут быть заняты одним из пять раз-четырех способов. Для каждого из таких способов имеется три пути для распоряжения третьим местом, так как можно каждую из трех остающихся букв поставить на третьем месте. Всего способов для распоряжения первыми тремя местами есть, стало быть, пять раз четырежды три. Остановившись на любом из таких способов, будем иметь два пути для занятия двух последних мест. Итого, пять букв можно разместить $5 \times 4 \times 3 \times 2$, то-есть 120 способами.

Этот метод подсчета размещений годен, очевидно, для любого числа букв; таким образом наше правило остается в силе для всех чисел.

Мы можем записать это положение сокращенно следующим образом: число размещений из n букв равно $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ или, при замене знаков умножения точками... $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n$. Единица, поставленная вначале, разумеется, не оказывает влияния на результаты умножения,— она внесена нами для того, чтобы ввести в нашу запись и тот предельный случай, когда будет всего лишь одна буква; ясно, что в этом случае будет только одно размещение.

Произведение $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n$, иначе говоря, произведение ряда первых n натуральных чисел встречается очень часто в точных науках. Поэтому нашли удобным иметь для него особый краткий значок, совершенно как у парламентских репортеров, имеющих особый значок для фразы: „замечания, которые, высокопочтенный член парламента считал необходимым сделать“. Различные математики пользовались, однако, для этой цели различными символами. Символ $\underline{|n}$ весьма часто употребляется в Англии, но он труден для печати. У некоторых писателей на континенте встречается знак восклицательный, а именно: !. Относительно этого знака было высказано правильное замечание, что он своим видом как бы претендует на то, что вы до сих пор ничего подобного не видали. Я лично предпочитаю знак, имеющий за себя веский авторитет Гаусса, а именно греческое Π (пи), которое может быть принято, если угодно, за сокращение слова *произведение*, например, в форме Πn. Мы можем теперь написать, что $\Pi 1 = 1$, $\Pi 2 = 2$, $\Pi 3 = 6$, $\Pi 4 = 24$, $\Pi 5 = 120$, $\Pi 6 = 720$ и что, вообще говоря, $\Pi(n+1) = (n+1)\Pi n$, так как произведение первых $(n+1)$ чисел равно произведению n таких чисел, умноженному на $(n+1)$.

§ 9. Теорема, служащая для нахождения любой степени $(a+b)$.

Применим теперь только выведенное правило к определению числа членов в $(a+b)^n$; для большей ясности мы начнем, как всегда, с частного случая, а именно с того случая, когда $n=5$. Мы знаем, что у нас получится среди прочих такой член, все сомножители которого будут равны a, и другой, все сомножители которого будут равны b; далее будет пять членов, представляющих собой произведение четырех a и одного b, и пять членов, представляющих собой произведение одного a и четырех b. Остается теперь определить только число тех членов, которые получатся от перемножения трех a на два b; их будет, разумеется, столько же, сколько членов, которые образуются от перемножения двух a на три b. Поэтому вопрос сводится к *определению числа различных, возможных размещений из трех a и двух b.*

В данном случае все три a тожественны, тожественны и оба b. Чтобы решить нашу задачу, мы должны считать их различными: поэтому заменим их на время некоторыми большими и малыми буквами. Сколько же различных размещений можно сделать при наличности трех больших букв ABC и двух малых de?

При рассмотрении этого вопроса большие буквы принимаются друг другу равноценными, равноценными друг другу принимаются и буквы малые, так что размещение $ABCde$ и $CABed$ считают за *одно и то же* размещение. Каждое такое размещение из больших и малых букв является одним из группы в $6 \times 2 = 12$ равносильных размещений. Действительно, 3 больших буквы могут быть размещены по отношению друг к другу $\Pi_3 = 6$ способами, а две маленьких $\Pi_2 = 2$ способами.

Ясно, что, взяв размещение сперва по отношению к большим и малым буквам и затем произведя всевозможные перестановки отдельно больших и отдельно малых букв, мы получим всю совокупность размещений из пяти букв $ABCde$; их будет $\Pi_5 = 120$. Но так как каждое размещение, составленное из больших и малых букв, повторится у нас двенадцать раз и так как 12 содержится в 120 в точности *десять* раз, то, оказывается, что искомым числом будет, число десять. Иначе число размещений из трех a и двух b равно частному от деления Π_5 на Π_3 и Π_2.

Вот эти размещения—

$$\begin{array}{rrrr} bbaaa, & babaa, & baaba, & baaab, \\ & abbaa, & ababa, & abaab, \\ & & aabba, & aabab, \\ & & & aaabb. \end{array}$$

В первой строке одно b стоит на первом месте, второе же b последовательно занимает *четыре* различных положения; в следующей строке одно из b стоит на втором месте, для другого же b представляется *три* возможных положения и т. д. Конечно, мы могли определить число размещений в данном частном случае, применив более простой процесс прямого подсчета, каким мы воспользовались для проверки, но преимущество нашего более длинного процесса в том, что он даст нам общую формулу, приложимую ко всевозможным случаям.

На время остановимся, чтобы дать себе отчет в том, к чему мы пришли.

Мы нашли, что

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b^3 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Заметим, что

$$1+5+10+10+5+1=32,$$

то-есть имеется 32 члена, которые стояли бы в последней строке дерева [1]), если бы мы применили диаграмму к данному случаю.

Теперь мы можем приступить к решению нашей общей задачи.

Предположим, что p число сомножителей, равных a, q число сомножителей, равных b, в известном члене; нам надо определить число возможных размещений, составленных из этих a и b, при чем первых имеется p, вторых q. Заменим на время a большими буквами и q малыми; больших букв, значит, будет p, что даст нам всего $p+q$ букв.

Каждое размещение, составленное при принятии в расчет различия больших букв и малых, является одним из группы равнозначащих размещений, получаемых путем всевозможных перестановок отдельно больших букв и отдельно малых. Перестановки p больших букв дадут нам Πp размещений, перестановки малых Πq размещений. Отсюда видим, что каждое размещение из известного числа определенных больших и малых букв является одним из группы $\Pi p \times \Pi q$ равнозначащих размещений. Но все число размещений из $(p+q)$ букв равно $\Pi(p+q)$; при чем, как мы видели каждое размещение, составленное из известного числа определенных больших и малых букв, повторено здесь $\Pi p \times \Pi q$ раз. Следовательно, искомое число получится, если разделим $\Pi(p+q)$ на $\Pi p \times q$.

Этот результат можно написать в виде дроби так:

$$\frac{\Pi(p+q)}{\Pi p \,.\, \Pi q}.$$

Но в сущности это частное не есть дробь, так как числитель всегда делится нацело на знаменатель. Действительно, было бы нелепостью говорить о восьмой доле способов размещать букв.

Мы пришли к выводу, что *число способов размещений из букв a и b, при чем первых p, вторых q* равно

$$\frac{\Pi(p+q)}{\Pi p \,.\, \Pi q}.$$

Но этот результат (в другой форме) представляет собой число способов разделения $p+q$ мест на p мест одного рода и q мест другого рода; или еще иначе он представляет собой число способов, какими мы можем отобрать p предметов из совокупности $p+q$ предметов.

Прилагая полученный нами результат к выражению $(a+b)^n$, мы находим, что каждый из его членов имеет такой вид:

$$\frac{\Pi n}{\Pi p \,.\, \Pi q} a^p b^q, \text{ где } p+q=n;$$

[1]) Автор говорит о диаграмме, подобной помещенным, например, на стр. 27 и 28.

мы можем найти все эти члены, давая q последовательно значения $=1, 2, 3$ и так далее, при чем значения p будут получаться путем вычитания этих значений из n.

Например, мы получим, что

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + \frac{\Pi 6}{\Pi 4.\Pi 2}a^4b^2 + \frac{\Pi 6}{\Pi 3.\Pi 3}a^3b^3 + \\ + \frac{\Pi 6}{\Pi 2.\Pi 4}a^2b^4 + 5ab^5 + b^6.$$

Нахождение необходимых чисел может быть значительно сокращено. Так, например, если надо разделить $1.2.3.4.5.6$ на $1.2.3.4$, то в результате получится, конечно, 5.6. Это произведение далее должно было быть разделено на 2, таким образом, в конце концов, мы получаем 5.3, или 15. Равным образом вычисляем мы

$$\frac{\Pi 6}{\Pi 3.\Pi 3};$$

для этого нам необходимо лишь разделить $4.5.6$ на $1.2.3$, то-есть на 6. Отсюда получаем просто 4.5, или 20.

Для того, чтобы записать наше выражение $(a+b)^n$, требуются другого рода сокращения. Мы видели, что выражение это состоит из ряда членов, каждый из которых имеет следующий вид:

$$\frac{\Pi n}{\Pi p.\Pi q}a^p b^q;$$

члены эти отличаются друг от друга числовыми значениями p и q, каждая пара которых в сумме дает n. Для обозначения произведения мы уже пользовались буквой греческой Π, для обозначения же суммы мы берем греческую букву Σ (сигма).

Таким образом, сумму всех таких членов можно написать так:

$$\Sigma\frac{\Pi n}{\Pi p.\Pi q}a^p b^q \qquad [p+q=n].$$

Теперь мы можем с полным основанием придать крайним членам a^n и b^n ту же общую форму, какую имеют другие члены. Действительно, пусть $p=n$; $q=o$; тогда член, соответствующий этим значениям, будет:

$\frac{\Pi n}{\Pi n.\Pi o}a^n b^o$, что равно просто a^n, так как $\Pi o = 1$ и $b^o = 1$.

Разумеется, „произведение первых нуль чисел“ не имеет смысла, но если мы вспомним, что правило, согласно которому

$$\Pi(n+1) = (n+1)\Pi n,$$

и которое остается в силе при каком угодно n, приложимо и в том случае, когда n обращается в нуль ($n+1$, следовательно, равно единице), то увидим, что $\Pi 1 = \Pi 0$.

Но мы уже нашли, что П1 = 1. Далее, если мы говорим, что b^q означает результат умножения 1 на b,—умножения, повторенного q раз, то b^0 должно означать, что 1 не умножена на b ни разу, то-есть, что действия умножения вовсе не было. Этот результат равен единице.

Условившись относительно толкования знаков, мы можем сказать, что

$$(a+b)^n = \Sigma \frac{\Pi n}{\Pi p \ \Pi q} a^p b^q \quad [p+q=n],$$

при чем подразумевается, что p может принимать все значения от n до 0, а q все значения от n до 0.

Результат этот называется *биномиальной теоремой*; впервые этот результат был получен Исааком Ньютоном. Выражение, содержащее *два* члена, например, $a+b$, иногда называется *биномом*, или *биномиальным выражением*. Название *теорема бинома* представляет собой сокращение другого названия, а именно: *теорема о любой степени биномиального выражения*.

§ 10. О действиях, повидимому, не имеющих смысла.

До сих пор мы рассматривали действия, при посредстве которых по двум данным числам можно было найти следующих два других числа.

Во-первых, мы можем сложить два данных числа, и получить их сумму.

Во-вторых, мы можем перемножить два числа, и получить их произведение.

На вопрос, что такое сумма этих двух чисел или их произведение, всегда существует ответ. Рассмотрим теперь вопросы, ответить на которые всегда возможно.

Предположим, что я спрашиваю, какое число надо прибавить к 3, чтобы получилось 7. Я знаю, конечно, что такое число равно 4, и действие, посредством которого получается 4, называется вычитанием 3 из 7.

Мы обозначаем это действие особым знаком и пишем так:

$$7—3=4.$$

Но если я спрошу, какое число надо прибавить к 7, чтобы получилось 4, то, несмотря на то, что вопрос, когда он выражен словами, повидимому, выражен правильным русским языком, ответа на него не имеется. И если я пишу символически выражение 3 — 7, то я задаю вопрос, на который нет ответа.

Здесь заключается существенное различие между сложением и вычитанием, так как два числа всегда имеют сумму.

Если я пишу выражение $3+4$, я пользуюсь им как имеющим некоторый смысл, потому что мне известно, что существует число, которое представлено этим выражением. Но если я напишу $3-7$ и затем буду говорить об этом выражении как о таком, которое обладает некоторым смыслом, то я тем самым буду утверждать бессмыслицу, потому что я так соединил знаками символы, как соответствующие им реальные значения не могут быть сопоставлены. На вопрос о том, какой получится результат, когда от одного числа отнимают другое, в том случае, когда второе число больше первого, может быть лишь один ответ.

Точно так же, когда я перемножаю два числа, я знаю, что произведение всегда существует, и потому я всегда свободно могу располагать таким символом, как 4×5: я знаю, что всегда имеется число, обозначаемое этим символом. Теперь я могу поставить вопрос иначе. Я могу спросить, какое число по умножении на 4 дает 20? Ответ в этом случае мне известен—это число 5; действие, при помощи которого я это число получаю, называется делением 20 на 4. Действие это обозначается также символом $20:4=5$.

Но предположим, что я выражаю желание 21 разделить на 4. Для этой задачи ответа нет. Нет такого числа,—числа в том смысле, в каком мы до сих пор употребляли это слово, то-есть числа целого,— которое будучи умножено на четыре, в произведении дало бы 21. И если я, взяв выражение $21:4$, буду говорить о нем, как о выражении, имеющем некоторое значение, я буду говорить нелепость, потому что я соединяю здесь символы, реальные значения которых не могут быть сопоставлены таким образом.

С фактом, наблюдаемым нами в данном случае, нам придется встречаться в математике еще не раз, так как каждое действие, какое только мы можем изобрести, сводится к постановке известного вопроса, и на этот вопрос, смотря по обстоятельствам, ответ существует или ответа нет.

Если мы, давая ответ, письменно сопоставляем известные символы в одном из тех случаев, когда ответа быть не может, и затем говорим об этих символах, как о чем-то имеющем значение, мы говорим бессмыслицу. Но бессмыслицу эту не следует выбрасывать прочь как негодную тряпку. Путем долгого и разнообразного опыта мы пришли к выводу, что нет ничего более ценного, чем получающаяся таким путем бессмыслица. Необходимо только дать себе отчет в том, что мы имеем дело именно с бессмыслицей и, установив это, придать ей смысл.

Мы придаем бессмыслице смысл, вкладывая новое значение в слова или символы, делающее возможным ответ на вопрос, на который первоначально ответа не было.

Рассмотрим в частности, вопрос о том, какое значение надо придать нашим символам для того, чтобы вложить смысл в лишенное теперь смысла выражение $3-7$.

§ 11. Ступени или поступы.

Операция прибавления 3 к 5 пишется $5+3$, и в результате ее получается 8. Мы можем рассматривать здесь $+3$ как способ перехода от 5 к 8 и символ $+3$ может быть передан следующими словами: *три ступени* [1]) *вперед*.

Точно так же, когда мы отнимаем 3 от 5 и получаем 2, мы пишем этот процесс символически в виде $5-3=2$; при этом символ -3 мы можем рассматривать как переход от 5 к 2. Если предыдущий переход надо было совершать вперед, то переход в данном случае надо выполнить назад, и потому символ -3 мы можем передать такими словами: *три ступени назад*.

Всегда предполагают, что те или другие переходы мы совершаем, отправляясь от числа достаточно большого; это делается для того, чтобы обеспечить результату смысл. Такое ограничение не относится к *поступам вперед*, так как вперед отойти от любого числа мы можем как угодно далеко. Назад же можно итти только в тех числах, которые больше, нежели то число ступеней, которое надо пройти назад.

Ближайшее обстоятельство, на которое следует обратить внимание при рассмотрении вопроса о поступах, состоит в том, что если совершают от данного числа последовательно два перехода, то не представляется существенным, какой из переходов будет совершен сначала. Если два перехода совершаются в одном и том же направлении, то высказанное положение для этого случая достаточно ясно. $+3+4$ означающее 3 ступени вперед и затем еще 4 ступени вперед, приводит нас к поступу на число, которое представляет собой сумму чисел, отвечающих двум данным поступам. Точно так же $-3-4$ приводит нас к переходу назад на сумму 3 и 4, то-есть на 7.

Если поступы совершаются по противоположным направлениям, как, например, в случае $+3-7$, то мы должны пройти вперед 3 ступени и назад 7; в результате окажется, что мы должны пройти назад 4 ступени. Но тот же результат мы получили бы, если бы сперва прошли назад 7, а потом вперед 3. В результате, всегда будет пе-

---

[1]) Перевод слова „*Step*“, которым Клиффорд почти на всем протяжении своей книги широко пользуется, представлялся довольно затруднительным. Термин *Step* (шаг; *отрезок, ступень*), встречаемый у Гамильтона еще в его *Lectures on quaternions* [Dublin, 1853], уже там употребляется не только в смысле перехода в самом общем случае от меньшей длины к большей, но и в таком сочетании слов, как „*step in time*“ [l. c. Preface, § 5], то есть в распространении передаваемого им понятия уже на категорию времени. Еще более широкий смысл влагает в слово *step* Клиффорд. Термин *поступ* был указан мне как возможный перевод стоящего в заголовке понятия, профессором А. В. Васильевым. Новый термин в его расширенном толковании, как убедится читатель, повидимому, вполне хорошо передает содержание понятия. В некоторой необычности его формы заключается известное преимущество, что справедливо и по отношению ко всем другим терминам символического вычисления, как, наприм., *вектор, скаляр, тенсор*, или, наконец, английское слово *curl*, содержание которого весьма концентрировано. Слово *step* (согласно одному из толкований Гамильтона) иногда будем переводить также термином *переход* (*примечание переводчика*).

реход, совершаемый в направлении большего из двух поступов, по размерам равным их разности.

Мы видим, таким образом, что два последовательно совершаемые перехода равнозначущи одному переходу, не зависящему от порядка, в каком совершались данные переходы.

Мы теперь придали нашим символам новое значение, которое сообщает смысл символу $3-7$, влагает в него содержание. 3 должно быть понимаемо в смысле $+3$, то-есть в смысле перехода вперед на 3; -7 должно быть понимаемо, как переход назад на 7, и все выражение указывает теперь уже не на то, что мы должны отнять 7 от -3, а на то, что надо прибавить 3 к какому-нибудь числу, достаточно большему для того, чтобы, по отнятии от него затем 7, получался результат, имеющий смысл. Согласно этому, мы находим, что результат этого действия равен -4. Иначе это мы можем написать так: $+3-7=-4$.

Пользуясь рассуждением, совершенно подобным тому, которым мы пользовались в случае умножения, мы приходим к выводу, что любое число последовательных переходов имеет некоторую равнодействующую, независящую от порядка, в котором эти поступы совершаются. Это правило мы можем рассматривать как расширение положения, уже нами доказанного для сложения чисел.

Поступ может быть умножаем, или, иначе, может быть взят данное число раз. Например, $2(-3)=-6$; иначе говоря, если возможно совершить в обратном направлении два перехода, каждый из которых равен 3 ступеням, то в совокупности они будут равнозначущи переходу назад на 6 ступеней.

Ясно, что в этом действии умножения поступа то, что мы делаем, есть не что иное, как умножение числа ступеней, которые должны быть пройдены, с сохранением притом нами характера перехода. При умножении поступа совершаемого вперед, у нас получается переход, совершаемый также вперед. При умножении же поступа, совершаемого назад, мы получим поступ, который придется совершить назад.

Такое умножение можно рассматривать, как действие, посредством которого мы превращаем один переход в другой. Таким образом, в примере, только что рассмотренном, множитель 2 изменяет совершаемый назад переход (размером в 3 ступени) в переход 6, совершаемый также назад. Но это действие, как мы заметили, превращает один поступ в другой того же самого рода, а потому, естественно, представляется такой вопрос: возможно ли найти такое действие, которое превращало бы данный переход в другой переход характера, уже отличного от данного? Такому действию мы, как это уместно, дадим название *действия поворотного*, *действия обращающего*. Мы скажем, что поступ, совершаемый вперед, *обращен*, если он превращен в переход назад. А переход, совершаемый назад, будем называть обращенным тогда, когда из него получен нами поступ, который придется совершить уже вперед.

Обозначим поворотное действие буквой r [1]); комбинируя это действие обращения с умножением, мы можем превратить -3 в $+6$; можем превратить переход 3, совершаемый назад, в переход 6, совершаемый вперед; а именно, у нас получится выражение $r2(-3) = +6$. Но действие, производимое над одним переходом, для того, чтобы превратить его в другой, может быть двух родов: или оно может быть таким, что после него переход совершается в том же направлении, какое он имел первоначально, или таким, что оно переход обращает. Для того, чтобы придать симметричность нашим выражениям, введем как символ, букву k [2]) в тех случаях, когда переход сохраняет свое первоначальное направление; мы можем теперь написать уравнение $k(2)(-3) = -6$ для выражения простого умножения. Разумеется, возможно и то, что при выполнении некоторого данного перехода, мы совершаем последовательно несколько таких действий. Если я беру поступ $+4$, утраиваю его и затем обращаю, то я получаю -12. Если удвоить этот поступ, и результат оставить без дальнейшего изменения, то у меня получится -24.

Это действие может быть записано так: $k2(r3)(+4) = -24$.

Но это число равно $r6(+4)$; а это говорит нам, что два последовательных действия, совершенных нами над этим поступом, действие утраивания и его обращения, а затем действие удваивания с сохранением полученного результата уже без изменения, равнозначущи одному единственному действию умножения на 6 и обращения результата. Ясно, что какой бы поступ мы ни взяли, два первых действия, последовательно совершенных над ним, всегда будут равнозначущи третьему, и потому это положение мы можем записать так:

$$k2(r3) = r6.$$

Предположим, что нами выбран другой поступ, что мы его утраиваем и полученный результат обращаем, затем удваиваем то, что получится, и снова обращаем результат. У нас получится тот же результат, что и от умножения взятого нами поступа на 6 с оставлением направления его без изменения.

Этот результат мы можем выразить следующим образом:

$$r2(r3) = k6.$$

Если мы сравним две последние формулы с полученными прежде, а именно с $k2(-3) = -6$ и $r2(-3) = +6$, то увидим, что обе пары равенств сходны; только в последней паре знаки k и r соответственно заменили собой знаки $+$ и $-$

---

[1]) Первая буква английского слова reverse—оборачивать.

[2]) Первая буква английского слова keep.— удерживать, оставить без изменения (*примеч. переводчика*).

Но обе пары равенств выражают вещи совершенно различные. Так, например, взяв вторые формулы обеих пар, мы видим, что в одной из них говорится: удвойте и обратите направленный назад поступ 3, и вы получите переход вперед, равный 6.

В другой формуле сказано: утройте, обратите, затем удвойте и снова обратите какой-нибудь поступ, и вы получите в результате *ушестерение* перехода с сохранением его направления. Мы найдем, что это тожество результата будет иметь место вообще во всех случаях, найдем, значит, что на ряду с написанным у нас результатом нескольких последовательных действий, совершенных над известным поступом, всегда существует другая соответствующая результату запись, согласно которой все эти последовательные действия заменяются одним действием. Иначе мы можем выразить это так: каждое действие, превращающее один переход в другой, превращает также и одно действие в другое, при чем превращение действия сводится к умножению его на число, характеризующее поступ-множитель, и к удержанию полученного результата без изменения или обращению его, в зависимости оттого берется ли поступ вперед или назад.

§ 12. Расширение смысла символов.

Теперь мы намерены сделать нечто такое, что, с одной стороны, по видимости, должно повлечь за собой величайшую путаницу, но зато, с другой стороны, должно увеличить в огромной степени наши силы.

У нас имеется два соотношения, до настоящего времени совершенно правильно обозначаемых различными символами; мы видели, что мы пришли к однородным результатам, в точности друг с другом сходным, за исключением того, что в одном из соотношений применена одна группа символов, в другом—другая; изменим значение наших символов так, чтобы у нас получилась вместо двух групп символов только одна группа. Во всем дальнейшем изложении мы будем придавать знакам $+$ и $-$ то значение, какое мы придавали символам k и r, то-есть будем понимать их как указание: „сохраните без изменения“ и „обратите“. Мы придаем этим знакам в дополнение к прежним значениям значения, только что указанные. Настоящее же их значение в отдельных случаях мы будем указывать в особых примечаниях. Таким образом, уравнение $(-2)(-3) = +6$ может иметь два значения; -3 и $+6$ могут представлять собой поступы, и в этом случае наша запись означает: удвойте и обратите поступ, равный 3, взятый назад, и вы получите идущий вперед поступ, равный 6. Но -3 и $+6$ могут представлять собой не только поступы или отрезки, но и действия и в таком случае наше равенство имеет такой смысл: утройте, обратите, затем удвойте и снова обратите какой бы то ни было поступ, и вы получите тот же результат, как в том случае, когда вы ушестеряете взятый поступ, оставляя полученный после этого результат уже без изменения.

Посмотрим теперь, в силу чего мы говорим, что эти два значения символов всегда могут существовать одно на ряду с другим. Прежде всего остановимся на втором толковании символов и установим правило для отыскания результата какого угодно числа последовательных действий.

Мы видим, что число, являющееся в результате множителем, очевидно, должно представлять собой произведение всех чисел, которыми характеризовались последовательно выполненные действия.

Мы видим далее, что каждые два обращения друг друга погашают, и таким образом, при наличности четного числа обращений результатом их будет действие *удержания первоначального смысла поступа.*

Отсюда следует такое правило: для получения произведения необходимо перемножить числа, характеризующие отдельные действия, ставя перед результатом знак $+$, если среди этих действий было четное число *минусов* или операций обращения, и — знак $+$, если таких „минусов“, или операций обращения, было число нечетное. Предположим сперва, что последовательные действия выполнены над некоторым поступом. Число, имеющееся в окончательном поступе, будет, очевидно, произведением всех чисел в последовательных действиях и в начальном поступе.

Если выполняется четное число обращающих действий, окончательный поступ будет того же самого рода, как и первоначальный; если же число действий нечетное, то окончательный отрезок будет противоположного рода. Предположим, что первоначальный поступ был поступом, взятым назад: в том случае, если над ним будет совершено четное число обращающих действий, в результате получится поступ, взятый также назад. Но в этом случае число знаков „минус“, независимо от их толкования, будет нечетным; таким образом, это правило совпадает с предыдущим правилом.

Если нечетное число обращающих действий совершается над отрицательным поступом, в результате будет поступ положительный. Но в данном случае число знаков (—), независимо от их смысла, есть число четное, а потому и тут результат совпадает с предыдущим.

Поэтому во всех случаях при употреблении одних и тех же символов, означают ли они, что поступ необходимо взять „вперед“ или „назад“, или же „сохранить прежнее направление“, или обратить его, мы будем в состоянии дать каждому выражению два толкования, и ни одно из них не будет неверным.

При исследовании этого положения, мы попутно показали, что результат любого числа последовательных действий, совершенных над некоторым поступом, не зависит от их порядка. В самом деле всегда существует поступ, который по своим размерам равен произведению чисел, представляющих первоначальный поступ и последовательно совершенные над ним действия; характер этого поступа определяется числом выполненных над ним обращений.

§ 13. Сложение и умножение действий.

Теперь пойдем дальше и отыщем правило, устанавливающее связь между умножением и сложением поступов.

Если я отдельно умножу на 4 поступы 3 и — 7 и затем найду сумму тех двух поступов, которые таким образом у меня получились, то я приду к тому же результату, как и в том случае, если бы я сначала образовал сумму + 3 и — 7 и затем умножил ее на 4. В самом деле $12 - 28 = -16$, что далее равно $4(-4)$. Положение это сохраняет свою силу вообще во всех случаях; оно, очевидно, сводится к правилу, данному нами в самом начале, согласно которому при подсчете любой группы предметов, в каком бы порядке мы ее ни пересчитали, мы приходим к одному и тому же числу. Только теперь в одной части подсчет должен быть совершаем в направлении обратного счета, в другой—в направлении счета прямого.

Но теперь мы можем, помимо сложения поступов, складывать в известном смысле также и действия. Для нас представляется естественным сразу допустить, что при сложении + 3 и — 7, рассматриваемых, как действия, мы должны в результате неизбежно получить действие — 4.

Очень важно не принимать никаких допущений без доказательства и еще более важно не пользоваться словами, если им не приписан определенный смысл. Смысл же того допущения, которое сделали мы, следующий. Если взять какой-нибудь поступ, утроить его, не изменяя его характера, полученный результат соединить с результатом умножения первоначального поступа на 7 и обращения последнего произведения, то, в конце-концов, получится тот же поступ как в том случае, когда первоначальный поступ умножают на 4 и затем придают ему обратное направление. Это совершенно верно, и можем убедиться мы в том, что это должно быть верно, выполняя, как это мы уже делали, наши действия над отрезками. Предположим, что я беру отрезок + 5 и должен утроить его, оставляя его характер без изменения. Я могу сделать это, взяв три отрезка, каждый равный пяти числам [1]), в том же направлении, как

[1]) Отрезок + 5 означает тут действие, производимое нами над каким-нибудь числом, действие в результате которого получается упятеренное число. Поэтому слова текста: „равный пяти числам" надо мысленно заменить фразой: „равный пяти таким же числам, как первоначальное" *(примечание переводчика)*.

и первоначальный отрезок (а именно в направлении прямом). Равным образом, если мне надо умножить его на — 7, то это значит, что я должен взять 7 отрезков, каждый из которых равен пяти числам, в направлении обратном, то-есть отсчитать назад. Таким образом, в конце-концов, я должен совершить три поступа вперед и семь поступов назад, при чем каждый из этих поступов состоит из пяти чисел.

Мы имеем теперь определение суммы двух действий. Путь, которым мы пришли к этому определению, показывает, что такая сумма не зависит от порядка действий.

Мы можем поэтому написать следующие формулы:

$$a + b = b + a$$
$$a(b + c) = ab + ac$$
$$(a + b)c = ac + bc$$
$$ab = ba$$

и рассматривать буквы, как обозначения действий, совершаемых над поступами. Благодаря справедливости этих законов, все рассуждения, которыми пользовались при нахождении степени суммы двух чисел, приложимы во всем своем об'еме к нахождению степени суммы двух действий. Если бы не потребовалось слишком много времени и места, мы могли бы снова воспроизвести все эти рассуждения, придавая символам их новое значение.

Тем не менее, быть-может, стоит отчетливо выяснить на какомлибо примере, что следует понимать под квадратом суммы двух действий.

Возьмем для этой цели $+5$ и -3.

Формула говорит нам $(+5-3)^2$ равно $(+5)^2 + (-3)^2 + 2(+$ $+5)(-3)$. Равенство это означает, что мы должны дважды совершить над каким-либо отрезком (или поступом) действие, указываемое суммой действий $+5$ и -3, то-есть, другими словами, мы должны умножить отрезок на 5 и оставить первоначальное его направление без изменения, а потом к полученному поступу прибавить результат от умножения первоначально взятого поступа на 3 и его обращения; если далее мы подвергнем тому же процессу получившийся теперь результат, то, в конце-концов, придем к отрезку, который мог бы быть образован путем сложения следующих трех поступов:

Во-первых, начального поступа, умноженного на 5.

Во-вторых, начального поступа, дважды умноженного на 3 и дважды обращенного, то-есть, другими словами, сохранившего свое первоначальное направление.

В-третьих, удвоенного результата от утроения начального поступа и его обращения, при чем далее результат этот был умножен на 5 уже без изменения его направления.

§ 14. Деление действий.

Мы уже видели, что подразумевается под умножением действий; рассмотрим теперь, какого рода вопрос представляется нам при *делении действий.*

Возьмем, например, символическое положение $(-3)(+5) = -15$ и истолкуем его сперва в том смысле, что утроение и обращение поступа 5 вперед дает поступ 15 назад. По поводу этого положения мы можем задать два вопроса. Во-первых, мы можем спросить: какое действие надо совершить над поступом вперед, равным 5, для того, чтобы получить поступ 15 назад? Ответ, разумеется, будет такой: надо совершить действие утроения и обращения. Во-вторых, мы можем спросить: какой поступ, будучи утроен и обращен, дает взятый назад поступ 15? На это ответят: это будет поступ 5 вперед. Но для описания процесса, при помощи которого мы получаем ответ в этих двух случаях, мы располагаем лишь одним словом. В первом случае мы говорим, что мы *делим* поступ -15 на поступ $+5$; во втором случае мы говорим, что делим поступ -15 на действие -3.

Слово *делить* приобретает таким образом два различных значения. Но чрезвычайно важно отметить, что символически ответ выражается одинаково в обоих случаях, несмотря на то, что в каждом из них толкование символов должно быть неодинаковым.

Поступ -15 может быть получен двумя путями, посредством утроения и обращения поступа $+5$ вперед или посредством повторения пять раз взятого поступа 3 назад. Выражая в символах, имеем:

$$(-3)(+5) = (+5)(-3) = -15.$$

Отсюда задача *деления* -15 на -3 может быть понимаема, как один из следующих двух вопросов: какой поступ, будучи утроен и обращен, дает поступ -15? Или, какое действие надо совершить над поступом -3 для того, чтобы получить поступ -15. Отвечая на первый вопрос, мы скажем, что это поступ $+5$; на второй вопрос мы ответим, что это будет действие упятерения без изменения направления,—другими словами, действие $+5$. Таким образом, несмотря на то, что слово *делить* имеет, как мы сказали, два различных значения, оба неодинаковых результата деления выражаются одним и тем же символом.

Вообще мы можем сказать, что решить задачу разделения поступа a на поступ b значит отыскать действие (если оно возможно), которое превращало бы b в a. Задача же разделения поступа a на действие b—означает, что надо найти такой поступ (если только он возможен), который обращал бы b в a. В обоих случаях как процесс, так и символическое его изображение—одни и те же. Мы должны разделить число a на число b и поставить перед результатом знак $+$, если знаки a и b одинаковы, и знак —, если они различны.

Мы можем также придать нашему исходному уравнению

$$(-3)\times(+5)=-15$$

его другое значение, при котором как -3, так $+5$, представляют собой действия, а -15 есть действие, которое равнозначуще первым двум, если совершить их одно за другим. В этом случае задача разделения действия -15 на действие -3 указывает, что надо найти такое действие, которое вместе с последующим за ним действием -3 было бы равнозначуще действию -15. Или, вообще говоря, разделить действие a на действие b значит найти такое действие, которое в совокупности с следующим за ним действием b было бы равнозначуще с a.

Следует отметить, что деление поступа на поступ и деление действия на действие до известной степени друг с другом сходны, но как то, так и другое отличны от деления поступа на действие. А именно, результат деления a на b, или, как это можно написать $\frac{a}{b}$ в том случае, когда a и b оба одновременно представляют собой поступы или действия, есть действие, превращающее b в a. Это можем записать сокращенно в виде

$$\frac{a}{b}\cdot b=a.$$

Но когда a поступ, а b действие, результатом деления является поступ, над которым для превращения его в a надо совершить действие b, или сокращенно,

$$b\,.\,\frac{a}{b}=a.$$

То обстоятельство, что символический результат в обоих случаях один и тот же, может быть отмечено так:

$$\frac{a}{b}\cdot b=b\,.\,\frac{a}{b}.$$

В этой форме, как мы видим, это положение является формой перестановительного закона. До тех пор, пока перестановительный закон верен, не представляется ни одного случая, где различием в символах пришлось бы отмечать отличие друг от друга обоих этих значений. Но современем мы увидим, что приходится иногда иметь дело с другого рода поступами и действиями, по отношению к которым перестановительный закон уже теряет силу; для этих-то случаев профессором Кели (Cayley) предложено новое удобное обозначение. А именно $\frac{a|}{|b}$ означает действие, превращающее b в a; $\frac{|a}{b|}$ представляет собой то, что действием b может быть превращено в a.

$$\frac{a|}{|b}\,.\,b=a, \text{ но } b\,.\,\frac{|a}{b|}=a.$$

Тем не менее удобно условиться теперь же, что всякий раз, как мы будем пользоваться символом $\frac{a}{b}$ без оговорок, символ этот мы будем понимать в его первом значении, то - есть как действие, превращающее b в a.

§ 15. Общие результаты нашего расширения смысла обозначений.

Мы должны отметить, что при помощи расширенного понимания обозначений мы имели возможность перейти от рассмотрения чисел, как таковых, с которых мы начали, к рассмотрению сначала поступов сложения и вычитания одного числа из другого, а затем действий умножения этих поступов с сохранением их первоначального направления или с обращением направления. При этом мы значительно расширили значение всех слов, какими приходилось пользоваться.

Сложению, под которым сначала подразумевалось сложение двух чисел, придано значение действия соединения поступов, при помощи которого в результате получается поступ, равнозначущий по своему содержанию данным поступам, взятым последовательно.

Умножению, первоначально прилагаемому только к двум числам, придан был смысл соединения нескольких операций, совершаемых над отрезками. При этом должно получиться некоторое окончательное действие, равнозначущее по результату с действием совокупности последовательно приложенных операций.

Мы нашли, что те самые свойства, которыми характеризуются сложение и умножение чисел, присущи также сложению и умножению поступов и действий. Вот этот-то факт сходства свойств привел нас к пользованию в новом смысле нашими старыми словами. Мы увидим, что тот же процесс будет применен при рассмотрении других вопросов, которые нам представятся. Однако точное сходство, какое мы наблюдаем при сравнении свойств более или менее простых с свойствами более сложных действий, не во всех случаях имеет место. Поэтому, хотя постепенное расширение смысла обозначений является орудием исследования, быть-может, наиболее могущественным среди тех, какими только нам приходилось до сих пор пользоваться, тем не менее применять его необходимо всегда с осторожностью, соразмерною его важности.

ГЛАВА II.

Пространство.

§ 1. Границы не имеют толщины.

Геометрия принадлежит к числу наук естественных. Она занимается рассмотрением размеров и форм предметов и расстояний между ними. Подобно тому, как при изучении *числа* предметов мы делали простые и очевидные наблюдения и затем пользовались ими в дальнейшем исследовании для того, чтобы установить, куда нас это наблюдение приведет, будем поступать мы и при изучении науки о форме предметов и их протяженности: мы сделаем одно или два очень простых и очевидных наблюдения и затем, пользуясь ими при всех дальнейших соображениях, посмотрим, что можно нам из них извлечь.

Мы делаем следующие наблюдения:

Во-первых: всякий предмет можно передвигать с одного места на другое, не изменяя притом ни размеров ни формы.

Во-вторых: возможны предметы, которые при одной и той же форме имеют различные размеры.

Прежде чем пользоваться этими наблюдениями для вывода из них тех или других точных заключений, необходимо рассмотреть более тщательно, что они означают.

Предметы занимают место. Стол, например, занимает известную часть комнаты, где он находится, но есть и другая часть комнаты, где его нет. По предмету устанавливается различие между этими двумя частями пространства.

Между такими двумя частями пространства находится то, что мы называем *поверхностью* стола.

Мы можем предположить, что все пространство вокруг стола наполнено воздухом. В таком случае поверхностью стола является нечто расположенное как раз между воздухом и деревом, нечто, разделяющее воздух от дерева, но в то же время отличное как от одного, так и от другого.

Было бы ошибкой предполагать, что поверхность стола суть очень тонкий слой дерева на наружной части стола. Мы можем усмотреть ошибочность такого предположения из того, что всякое соображение, которое привело бы нас к признанию этого взгляда, заставило бы нас также утверждать, что поверхность есть чрезвычайно тонкий слой воздуха у самого стола. На самом же деле поверхность, как у дерева, так и у воздуха, общая и сама по себе не имеет никакой толщины [1]).

Одна часть поверхности может быть одного цвета, другая—другого.

На этой странице сделано черное круглое пятно. Мы называем черную часть—кругом.

Черт. 1.

Пятно разделяет поверхность на две части: одну, в которой оно само находится, другую—в которой его нет.

Круг занимает место на поверхности, хотя сама поверхность не занимает места в пространстве. Таким образом мы пришли к рассмотрению двух различных родов *пространства*: во-первых, то пространство, в котором находятся твердые тела и в котором они двигаются, и, во-вторых, протяженные поверхности, которые могут быть рассматриваемы с двух различных точек зрения. С одной точки зрения, поверхность есть граница между двумя смежными частями пространства, сама пространства, как его обычно понимают, не занимающая. С другой точки зрения, она сама является родом пространства, которое может быть занято отдельными ее частями.

Части эти, в свою очередь, имеют границы. Между черной поверхностью круга и белой поверхностью бумаги мы видим линию—окружность круга. Линия не составляет ни части черного ни части белого, но лежит между черным и белым. Она разделяет одну часть от другой, сама не занимая какой-либо доли поверхности. Линия—это не очень тонкая полоска поверхности, все равно как поверхность не будет очень тонким слоем тела.

Черт. 2.

Всякое соображение, которое привело бы нас к выводу, что эта линия, граница черного пятна, представляет собой тонкую полоску черного, привело бы нас к признанию того, что эта линия есть также узкая полоска белого.

Мы можем эту линию также разделить на две части. Если бумагу с нашим черным кругом погрузить в воду, так, чтобы часть черного круга была в воде, то линия, ограничивающая круг, будет отчасти в воде, отчасти вне ее.

---

[1]) Очевидно, что как бы *гладкой* ни казалась *естественная* поверхность, путем увеличения можно обнаружить ее шероховатость. Таким образом, в случае поверхности, разделяющей стол от воздуха, можно считать правдоподобным существование тут такого слоя, в котором частицы дерева и воздуха перемешаны. В этом случае границей воздуха и стола будет не то, что „мы видим и чувствуем" (см. стр. 49), границей не будет то, что соответствовало бы поверхности геометра. Мы вынуждены, думаю, рассматривать поверхность геометра, „как идею или как воображаемое понятие", отвлеченное от *явных* (но не реальных) границ физических тел, таких, как описываемые автором. Как сильно ни чувствовал я, что геометрические понятия точных наук имеют характер идей, я считал нежелательным изменять текст. Различие в этих понятиях установлено самим Клиффордом (Essays, I, pp. 306—321). *К. П.*

Погруженная часть линии занимает на ней место. Она проходит по окружности в известной ее части. Таким образом мы приходим к рассмотрению протяжения, как линии, наравне с рассмотрением протяжения, в котором находятся все тела и протяжения, как поверхности. Линия не занимает на поверхности никакого места: она является только границей между двумя смежными ее частями. Еще того менее может она занимать место в пространстве обычном. Но она занимает известное протяжение на самой себе, и это протяжение может быть разделяемо на части и может быть занято или наполнено этими частями.

Эти части, в свою очередь, имеют границы. Между погруженной частью окружности и другой ее частью находятся две *точки*, по одной на каждом конце. Эти точки не находятся ни в воде ни вне ее. Оне находятся на поверхности воды постольку, поскольку оне принадлежат и поверхности бумаги, оне находятся также и на границе черного пятна. На этой прямой оне не занимают ровно никакого протяжения.

Точка—не линия очень малой длины, как линия не очень узкая полоска поверхности. Точка служит местом разделения двух частей линии, которые лежат рядом друг с другом, так что точка не занимает на линии никакого протяжения.

Здесь очень важно отметить то обстоятельство, что мы здесь не говорим об идеях, или о понятиях, существующих в воображении, но что мы делаем одни лишь наблюдения в пределах повседневного опыта, руководствуясь при этом здравым смыслом.

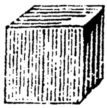
Линия на поверхности, отделяющая одну часть поверхности от другой, входит также в круг повседневного опыта. Такая линия не есть идеальное понятие, к которому мы пришли бы, воображая бесконечное утоньшение нити, такая линия дается непосредственно наблюдением, как принадлежащая обеим частям разделяемой ее поверхности и потому не имеющая совершенно никакой толщины. То же самое можно сказать и относительно точки. Точка, отделяющая часть нашей окружности, находящейся в воде, от части, находящейся вне воды, есть нечто наблюдаемое. Точка тут не идеальное построение, к которому мы приходим, предположив, что небольшая частица становится все меньше и меньше и так до бесконечности, точка представляет собой границу между двумя смежными частями линии, являющейся границей между двумя смежными участками поверхности, которая, в свою очередь, служит границей между двумя смежными долями пространства. Точка есть нечто такое, что мы можем видеть и познавать, а не абстрактное построение, созданное нашей мыслью.

Когда мы говорим о вычерченных на бумаге прямых или о взятых на ней точках, мы пользуемся не языком геометра, а языком чертежника.

Пред нами изображение куба, выполненное, как сказал бы чертежник, при помощи *штрихов*. Каждая из этих так называемых

„штрихов“ есть черная черта типографских чернил, неодинаковой на своем протяжении ширины, занимающая на бумаге известное место.

Проводя эти „штрихи“ достаточно близко друг к другу, мы можем покрыть ими какой угодно кусок бумаги. Каждая из этих


Черт. 3.

черт имеет по обеим сторонам по линии, отделяющей черную часть поверхности от белой: это и будут настоящие геометрические линии, оне не занимают на поверхности места. Между границами любой из наших черт можно провести миллионы миллионов таких геометрических линий, и между каждыми двумя этими линиями найдется место для новых миллионов.

Тем не менее представляется весьма удобным при черчении геометрических фигур пользоваться для изображения линий черными чертами. Чтобы избежать каких бы то ни было недоразумений, могущих произойти в этом направлении, мы раз навсегда условимся относительно смысла, в каком мы будем понимать изображение линий при помощи черной черты. Когда черта проведена вертикально или идет на странице сверху вниз, подобно этой ¦ , за *прямую*, представляемую ею, мы будем считать *границу* ее *справа*. Во всех прочих случаях за прямую мы будем принимать *верхнюю границу* черты.

Те же соображения относятся к точке. Всякий раз, как мы пробуем изобразить геометрическую точку при помощи точки на бумаге, мы делаем черное пятно неправильной формы. Границей этого черного пятна служит линия. Если одна из точек этой границы расположена выше других, то эту выше других помещенную точку мы и будем считать той, которую должно представить пятно на бумаге. Если же несколько точек границы расположены на одной и той же высоте, и нет такой точки, которая лежала бы выше их, так что граница в верхней своей части выравнена, то правый конец этой ровной части мы и будем принимать за точку, изображением которой служит наше пятно.

Этим определением значения деталей наших чертежей на практике не пользуются. Мы даем его лишь для того, чтобы читатель ошибочно не принял пятен и черт за точки и прямые.

§ 2. Длины могут быть переносимы из одного места в другое без их изменения.

Рассмотрим, что следует понимать под первым из наших наблюдений относительно свойств пространства, гласившим, что предметы могут быть переносимы с одного места на другое без изменения их формы или размеров.

Прежде всего обратимся к размерам. Мы определяем размеры предмета при помощи измерения в нем расстояний между различными его точками. Так, например, мы найдем размеры стола, измерив расстояние от одного конца его до другого, или измерив расстояние поперек стола, или, наконец, расстояние от крышки до пола. Измерение расстояния возможно лишь в том случае, когда у нас есть нечто в роде аршина или тесьмы, которые мы можем переносить с места на место и которые при этом передвижении не изменяют своей длины. Измерение выполняется посредством прикладывания этих предметов к расстоянию, подлежащему измерению; при этом мы наблюдаем, какая часть приложенной длины совпадает с рассматриваемым расстоянием.

Две длины или два расстояния мы считаем *равными*, когда в них укладывается одна и та же часть нашей меры.

Таким образом мы скажем, что два стола имеют одинаковую ширину, если, отметив на куске тесьмы ширину одного стола и перенеся тесьму на другой стол, найдем, что при измерении его ширины мы доходим как раз до метки на тесьме. Но кусок тесьмы, хотя он удобен, не является абсолютно необходимым для установления данного факта. Мы могли бы перевернуть один из столов вверх ножками и поставить его на верхнюю доску другого стола; таким путем мы могли бы также найти, что ширина двух столов одинакова. Так что, вообще говоря, две длины или два расстояния какого бы то ни было рода равны, если, будучи приложены друг к другу, они могут прийтись точка в точку без предварительного изменения той или другой длины. Но тесьма представляет собой предмет, переносимый с места на место с гораздо большим удобством, чем стол, а потому на практике мы будем испытывать равенство ширин, измеряя их при помощи одного и того же куска тесьмы.

Мы находим, что ширина обоих предметов равна одному и тому же куску тесьмы. Мы утверждаем, что *длины, равные одной и той же длине, равны друг другу*. Это равносильно заявлению, что наш кусок тесьмы, будучи, скажем, обернут вокруг некоторой замкнутой кривой и затем перенесен обратно в свое первоначальное положение, не изменяется по длине.

Как же это так? Предположим, что наш кусок тесьмы, когда им не пользуются, растянут на доске, при чем один конец его прикреплен к определенному месту, отмеченному на этой доске. Мы знаем, что следует подразумевать при этом под равенством двух длин, отмеренных от этого конца вдоль по тесьме. Возьмем теперь три стола и предположим, что мы произвели измерение и нашли, что ширина стола A равна ширине стола B и что ширина B равна ширине стола C; на основании этого мы можем сказать, что ширина A равна ширине C. То, что мы сказали, показывает, что мы отметили ширину A на тесьме, потом перенесли кусок тесьмы этой длины на B и нашли, что эти две величины совпадают. Затем мы перенесли ту же длину с B на C и нашли, что и тут имеет место совпадение этих величин. Заявляя, что ширина C равна ширине A, мы тем самым утверждаем, что, перенеся тесьму с C на A, независимо от того, перемещаемся ли мы поблизости от B или нет, мы найдем, что она совпадает с шириной A. Другими словами, если мы перенесем нашу тесьму с A на B, а затем с B на C и оттуда обратно на A, тесьма эта попрежнему, как и сначала, будет совпадать с A.

Эти соображения приводят нас к весьма примечательному выводу. Читатель, вероятно, заметил, что мы определяли длину или расстояние при помощи меры, которую можно было *переносить без изменения ее длины*. Но как установить самый факт существования такого свойства меры? Мы можем для исследования длины нашей тесьмы пользоваться аршином в виде палки; мы в состоянии доказать этим путем всего на всего то, что два предмета, находясь в одном и том же месте, всегда имеют одну и ту же длину, а не то, что эта длина остается неизмененной.

Факт тот, что все прекрасно шло бы попрежнему и при предположении, что предметы от одного только переноса с места на место изменяются по длине, при условии, что 1) различные предметы изменяются одинаково и 2) что все, что испытало перемещение и затем было возвращено обратно в первоначальное положение, заполняет собой ту же часть пространства, как и раньше [1]). Единственно, что необходимо,—это то, чтобы два предмета, которые оказываются совпадающими по величине в одном месте, были одинаковы по величине и в другом месте, хотя бы и перенесены сюда они оказались различными путями. Все это, разумеется, с оговоркой, что нет никаких других соображений, подтверждающих предположение противоположное. Кусок тесьмы и палка, совпадающие друг с другом по длине в Лондоне, будут совпадать также и в Нью-Иорке, хотя палка могла быть перевезена сюда Атлантическим океаном, а тесьма через Индию и Тихий океан. Конечно, палка могла разбухнуть от сырости, а тесьма скрутиться от сухости (мы можем допустить влияние таких условий, геометрического характера не имеющих), но поскольку речь идет об условиях геометрических, при одном только перемещении, при одной перемене места, два предмета, одинаковых по длине в одном месте, окажутся одинаковыми и в другом месте.

На этом факте основываются, как мы видели, определение длины, как чего-то измеренного, и аксиома, согласно которой длины, равные одной и той же длине, равны друг другу.

Но не может ли, однако, случиться, что длины действительно изменяются в силу одного лишь перемещения, при чем мы не отдаем себе в этом отчета?

---

[1]) Эти замечания относятся к геометрическим свойствам тел, а не непременно к физическим свойствам.

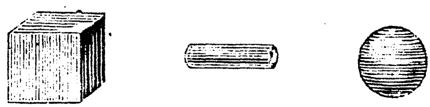
К. П.

Кто пожелает поразмыслить серьезно над этим вопросом, найдет, что вопрос этот совершенно лишен смысла. Но время, затраченное на то, чтобы прийти к такому заключению, не будет потеряно совсем понапрасну.

§ 3. Характерные черты формы тел.

Мы уже видели, что разумеем мы, говоря, что вещь может быть перемещаема без изменения ее размеров: а именно, мы имели в виду, что любая длина, которая совпадает с известной мерой в одном месте, будет равна ей и в том случае, если переместить обе какими бы то ни было путями в какое-нибудь другое положение. Теперь исследуем, что надо подразумевать под словами, что вещь может быть передвигаема без изменения ее формы.

Прежде всего заметим, что форма вещи зависит только от ограничивающей вещь поверхности, а нисколько не от того, что находится внутри. Таким образом, мы всегда имеем возможность говорить о форме поверхности и, делая так, подразумеваем, что все сказанное будет относиться и к формам вещи.



Черт. 4.

Постараемся теперь подметить некоторые характерные черты поверхностей предметов. Пред нами куб, цилиндр и сфера. Поверхность куба состоит из шести плоских сторон, с их ребрами и углами. У цилиндра два плоских конца и между ними округленная поверхность. Плоские концы отделяются от округленной части двумя круговыми краями. Сфера имеет на всем своем протяжении круглую гладкую поверхность.

Мы замечаем сразу большое различие в форме *гладких* частей поверхности и в форме ее *краев* и *углов*. Край поверхности, будучи линией на поверхности, не представляет собой какой-либо *части* ее, в смысле способности занимать поверхность, рассматриваемую как протяженность; еще в меньшей степени в этом смысле частью поверхности является угол куба [1]), который не что иное, как точка.

Тем не менее мы можем разделить все точки поверхности на такие, где поверхность гладка (сюда относятся, например, все точки сферы, точки на круглых и плоских частях цилиндра и на плоских гранях куба), на точки, расположенные на краях, и углы. Ради удобства будем называть такие точки соответственно *гладкими*, *краевыми точками* и *угловыми точками* [2]). Мы можем также соединить края и

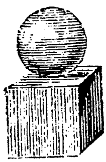
---

[1]) Читатель помнит, что Клиффорд имеет здесь в виду „угол" в обиходном смысле этого слова, т.-е., строго говоря, вершину трехгранного угла (*прим. переводчика*).

[2]) Мы сохраняем терминологию Клиффорда, у которого в тексте все рассматриваемые точки подразделяются на *smooth-points*, *edge-points* и *corner-points* (*прим. переводчика*).

углы в одну группу, назвав их негладкими, *выступающими точками* (rough points).

Возьмем шар и положим его на плоскую грань куба (черт. 5). Эти два тела будут соприкасаться в одной точке; другими словами, известная точка на поверхности шара и известная точка на поверхности куба приведены в совпадение друг с другом и теперь представляют собой одну и ту же точку. Обе эти точки гладкие.



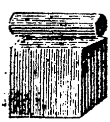
Черт. 5.

Оказывается, что *мы не можем передвинуть шар столь незначительно, чтобы* при этом не произошло *отделения этих точек друг от друга.* Если шар катится по грани куба, проходя при этом, хотя бы чрезвычайно малый путь, различные точки шара, как мы найдем, будут приходить в соприкосновение с новыми и новыми точками куба.

Те же соображения сохраняют свою силу и в том случае, если мы приведем шар в соприкосновение с гладкой точкой цилиндра (черт. 6).

Положим теперь цилиндр его округленной частью на плоскую грань куба. В этом случае соприкосновение будет иметь место вдоль по прямой. В любой точке этой линии та или другая точка, находящаяся на поверхности цилиндра, приведена в совпадение с некоторой точкой, принадлежащей поверхности куба, так что они представляют теперь одну точку. Все это гладкие точки. Совершенно подобно тому, как и раньше, мы видим, что невозможно передвинуть одно тело относительно другого хотя бы на самую незначительную величину без того, чтобы не разделить те точки их поверхности, в которых эти поверхности соприкасаются. Мы найдем, что, при катании цилиндра по грани куба на самом небольшом протяжении, новые линии цилиндра приходят в соприкосновение с новыми линиями куба. Все точки касания заменяются новыми.

Черт. 6.

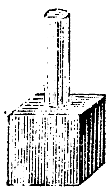


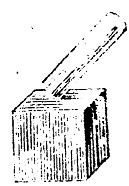
Черт. 7.

Поставим теперь цилиндр на куб его плоской стороной. Обе поверхности теперь совершенно совпадают и образуют только одну поверхность; теперь соприкосновение происходит не в точке и не по линии (как это было раньше), а по поверхности. Остановим наше внимание на какой-либо одной точке плоской стороны цилиндра и точке, принадлежащей грани куба, с которой первая точка совпадает; обе точки гладкие. Мы замечаем, что *невозможно хоть сколько-нибудь передвинуть эти два тела относительно друг друга без того, чтобы не разъединить в то же время и две точки прикосновения* [1]).

[1]) Во всех этих случаях (черт. 5—8) относительное движение, о котором мы говорили, было или движением *перенесения*, или движением *наклонения*. Тело может также иметь *вращательное* движение вокруг некоторой вертикальной оси без разделения двух сказанных

При этом, однако, имело место нечто такое, из чего мы можем почерпнуть дальнейшие указания. До сих пор мы постоянно предполагали, что плоская сторона цилиндра меньше, нежели плоская грань куба. Пусть при соприкосновении этих двух плоских сторон цилиндр занимает среднюю часть грани куба, как на черт. 8, так что круг совершенно заключен в квадрате. Если мы теперь наклоним цилиндр, мы приведем его в положение, показанное на черт. 9. Мы уже заметили, что в этом случае гладкие точки, бывшие первоначально в соприкосновении, уже не будут, как раньше, соприкасаться. Но при этом существует две точки, которые остаются соприкасаются действительно, при положении наклонения одна из точек на круговом краю цилиндра лежит на точке грани куба, а эти две прежде соприкасались. Мы можем наклонять цилиндр больше или меньше, лишь бы при этом наклонение происходило всегда в одном и том же направлении без вращения и катания цилиндра на его ребре, и две эти точки будут оставаться в соприкосновении.

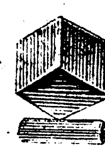

Черт. 8.


Черт. 9.

Мы видим поэтому, что *при соприкосновении точки кривой с точкой гладкой возможно передвижение одного тела относительно другого без разделения этих точек.*

То же самое мы можем наблюдать, если цилиндр положен своей округленной частью или плоской стороной на ребро куба, или если мы кладем шар на край одного из этих двух тел. Удерживая одно из тел неподвижным, мы можем передвигать другое так, что в соприкосновении будут оставаться одне и те же точки; для того, чтобы достигнуть этого, необходимо наклонение производить всегда в одном и том же направлении.

Если же мы приведем угол куба в соприкосновение с гладкой точкой цилиндра, как на черт. 10, то мы найдем, что мы можем удержать эти точки в соприкосновении, не налагая ограничений в отношении направления наклонения. Мы можем наклонять куб как нам угодно, при чем угол останется в соприкосновении с гладкой точкой цилиндра.


Черт. 10.

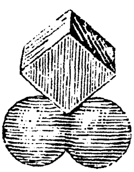
Когда мы прикладываем друг к другу две точки, принадлежащих краям тел, то получаются различные условия в зависимости от того,

---

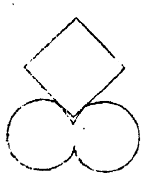
точек. Истинным различием между касанием точек гладких и касанием негладких может служить, повидимому, следующее обстоятельство: касание в первом случае, если не разделяет точек друг от друга, обладает лишь *одной* степенью свободы, а именно возможностью вращения около оси проходящей через эти точки перпендикулярно к обеим гладким поверхностям; в последнем же случае (точка на ребре и гладкая точка) может иметься по меньшей мере две или бесконечно большое число степеней свободы, а именно вращение около двух или более осей, проходя через негладкую точку. Читатель будет понимать эти термины лучше после знакомства с главой о движении. *К. П.*

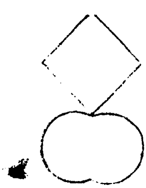
совпадут ли края в точке соприкосновения или будут друг друга пересекать. В первом случае мы можем удержать две определенные точки в соприкосновении лишь при наклонении тел в некотором определенном направлении, во втором—мы можем наклонять тело в любом направлении. Таким образом, при соприкосновении точки, расположенной на краю тела с углом, или еще в большей мере при соприкосновении угла с углом, направление наклона не ограничено ничем.

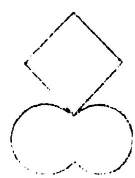
На основании всего этого можно прийти к выводу, что поверхности *во всех гладких точках в известном смысле имеют одну и ту же форму*, потому что, при приведении в соприкосновение двух гладких точек, поверхности так совпадают в этих точках, что мы не будем в состоянии передвинуть одну точку относительно другой, не отделяя этим и самых точек [1]).


Черт. 11.

Два края двух различных тел могут так совпадать друг с другом, что мы не будем иметь возможности сдвинуть то или другое тело, не отделяя в то же время друг от друга соприкасающихся точек. Для этой цели необходимо, чтобы один из краев был „входящим" (то-есть, чтобы в поверхности не было выступа, а была впадина), как на чертеже 11; мы можем видеть тут, что подразумевалось под двумя поверхностями, имеющими одну и ту же форму в точке, где они совпадают указанным образом. Тело, приведенное в соприкосновение с кубом, образовано путем соединения двух сфер, от которых срезано по некоторой части. Если срезаны только очень небольшие части, входящая часть поверхности будет очень остра, и мы не будем иметь возможности привести в соприкосновение ее ребро и ребро куба (черт. 12). Если отрезать от каждой сферы приблизительно по половине, то к входящему краю будет широкий доступ, и куб войдет в поверхность (черт. 13).


Черт. 12.


Черт. 13.


Черт. 14.

Существует, как это очевидно, только одна промежуточная форма, при которой два ребра совпадают друг с другом вполне (черт. 14); совпадение ребер, действительно, здесь имеет место, но полного вхождения одного тела в другое нет. В этом случае, несмотря на то, что один из краев выдается вперед, а другой находится во впадине, мы все же можем сказать, что наши две поверхности у таких краев имеют одну и ту же поверхность. Действительно, если мы предположим, что наше тело, образованное из

[1]) См., однако, примечание на стр. 70. К. П.

срощенных, наподобие близнецов, шаров, сделано из дерева, его поверхность будет поверхностью не только дерева, но и поверхностью окружающего тело воздуха. И та часть поверхности, которая по отношению к дереву оказывается вдавленной (впадиной), в то же время является выступающей, если будем ее рассматривать как поверхность воздуха.

Совершенно таким же образом каждое из выступающих ребер и каждый из углов куба будет в то же время по отношению к воздуху впадиной или углублением. Но *поверхность* принадлежит одновременно как дереву, так и воздуху: она не знает различия между внутренней и внешней ее частью; слова „повышение“ и „понижение“ по отношению к ней лишь термины, произвольно примененные. Так, в тонкой металлической пластинке, на которой что-либо выбито, возвышение по одну сторону означает наличность понижения по другую сторону и наоборот, и мы в праве совершенно произвольно признать *лицевой* ту или другую сторону. Отметим только, что тонкую металлическую пластинку ни в каком случае нельзя считать воспроизведением *поверхности;* такая пластинка представляет собою лишь тонкое тело, у которого две поверхности чрезвычайно близки друг другу по форме.

Таким образом, мы видим, что ребро деревянного куба имеет ту же форму, как и ребро поверхности воздуха в теле, составленном из двух сфер-близнецов, или, что одно и то же, что две поверхности имеют при этом ребре одинаковую форму.

Эти сферы-близнецы представляют большое удобство: мы можем внести в них такие изменения, которые позволят получить нам ребра любой формы.

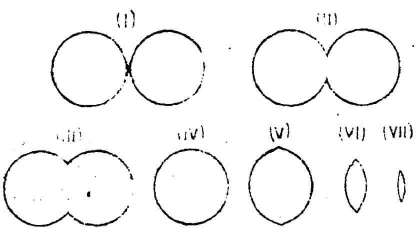
До сих пор мы предполагали, что отрезываемые нами части шаров были меньше полусферы. Соединяя эти отрезанные части, мы получаем тело с выступающим ребром (черт. 15). Два тела, первое, образованное из больших частей сфер с ребром входящим, и второе, образованное из меньших частей с ребром выступающим, имеют, как мы можем показать, всегда одинаковой формы ребра, благодаря чему они и совпадают по этому ребру в смысле, только что нами установленном.

Черт. 15.

Предположим, что наши шары разрезаны каждый на две части почти точно пополам (само собой разумеется, что оба шара необходимо разрезать одинаково, иначе не совпадут плоские стороны разрезов). Если мы соединим друг с другом отдельно большие части и отдельно меньшие, то у нас получатся тела с очень широким расхождением у ребра. Выступающий край будет слабо выдающимся хребтом, а входящий край—весьма незначительным понижением поверхности.

Если мы сделаем еще шаг далее и разрежем наши шары как раз пополам, то каждое из вновь образующихся тел будет также шаром. на котором не представится ни хребта ни понижения; поверхности будут гладкими повсюду. Но к этому результату мы приходим или путем рассмотрения постепенного расхождения поверхностей у выступающего ребра,—расхождения, совершающегося до тех пор, пока рубец на поверхности не исчезает, или же путем рассмотрения постепенного расхождения. поверхностей у ребра входящего до момента исчезновения впадины. Иначе еще можно предположить, что поверхности у выступающего ребра расходятся до тех пор, пока ребро не становится гладким, при чем далее оно превращается уже в ребро входящее. Мы можем увидеть этот процесс глазом, поместив серию чертежей, подобных данным на чертеже 16, в стробоскоп и затем приведя круг прибора в быстрое вращение.

Мы увидим при этом, как два шара, вначале друг от друга отделенные, сольются в одно тело (II и III), затем образуют один шар (IV) и потом будут сокращаться, принимая формы все меньших и меньших чечевиц. Важным обстоятельством, заслуживающим быть отмеченным, является тот факт, что шар как одно целое (IV) является одним из ступеней этого процесса. Или, что одно и то же. что *гладкая точка есть частный случай точки, принадлежащей ребру, случай,— имеющий место по пути преобразования выступающего ребра в входящее.*



Черт. 16.

Поэтому, принимая гладкие точки за частный случай точек, лежащих на ребре, мы утверждаем, что во всех гладких точках различные поверхности имеют одну и ту же форму.

§ 4. Характерные особенности границ поверхностей.

Замечания, подобные сделанным нами относительно тел или частей пространства, могут быть высказаны и относительно частей поверхности.

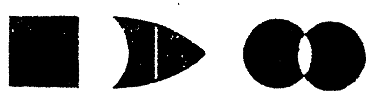
Только мы не можем теперь сказать, что форма части поверхности зависит исключительно от формы кривой, которая эту часть поверхности ограничивает. Тем не менее единственное, что остается нам рассмотреть, это форма границы, так как форму поверхности, заключенной внутри границы, мы уже изучили (поскольку это возможно было в настоящее время плодотворно выполнить).

Мы найдем полезным ограничить себя еще более, рассматривая только те границы, которые не содержат в себе негладких точек поверхности. Таким образом, на поверхности куба мы будем рассматривать только те части, которые сплошь входят в одну из плоских граней; на поверхности же цилиндра только те части, которые входят либо целиком в одну из плоских его сторон, или сплошь в его округленную часть, или, наконец, такие, которые включают в себе одну из плоских сторон и участок кривой поверхности цилиндра.

Раз это так, характерные особенности границ участков поверхностей, которые мы имеем в виду установить, могут быть удовлетворительно изучены при помощи фигур, начерченных на листе бумаги. Мы можем согнуть бумагу и, таким образом, удостовериться, что общие с ними свойства принадлежат также фигурам, начерченным на цилиндре; и для того, чтобы придать нашим идеям совершенную отчетливость, следует некоторые фигуры вычертить на сфере или на какой-нибудь другой такой поверхности.

На черт. 17 дано несколько участков поверхностей: квадрат, криволинейная фигура о трех углах и два отчасти покрывающие друг друга круга. Для ясности та часть, в которой круги взаимно наложены один на другой, оставлена незачерченной, остальная же часть сделана черной.

Обращая особенное внимание на границу этих участков, мы замечаем, что она состоит из гладких частей и из углов. Одни из этих углов выдаются вперед, другие—углы входящие. Куски поверхностей уже не те твердые тела, способные к передвижению, какими были части пространства, рассмотрением которых мы занимались раньше; однако мы и теперь в состоянии до известной степени подражать нашим прежним опытам, вырезая из листа бумаги перочинным ножем наши фигуры и таким образом, отмечая их прежние положения остающимися на листе отверстиями. Прикладывая вырезанные части друг к другу или к отверстиям, мы найдем, что во всех гладких точках границы фигур в известном смысле друг с другом совпадают. А именно, если привести две гладкие точки в соприкосновение, мы не будем в состоянии катать одну фигуру по другой, не разделяя точек; но в то же время, если приведены в соприкосновение точка выступающая (или угол) с точкой гладкой, мы можем катать одну фигуру по другой, этих точек не разделяя. Если мы попытаемся совместить один угол с другим так, чтобы фигуры при этом не налегали друг на друга, то мы будем наблюдать те же случаи, какие имели место при изучении ребер твердых тел. Предположим, что мы пытаемся вложить угол квадрата в один из входящих углов, образованных двумя налегающими друг на друга кругами. Если входящий угол слишком остер, мы вовсе не будем иметь возможности сделать это: таков случай, представленный на чертеже 12. Если же угол будет достаточно широк, то квадрат может в него войти. Последний случай представлен на чертеже 13. Между этими двумя случаями находится случай промежуточный, при котором один угол приходится как раз



Черт. 17.

по другому; тут имеет место действительное соприкосновение, и никакого вхождения здесь быть не может. В этом случае мы говорим, что два угла имеют одну и ту же форму и что они друг другу *равны*.

На основании всего сказанного мы приходим к заключению, что вопрос о *форме сводится в сущности к вопросу об углах* и что тождественность формы зависит от равенства углов. Мы занимались изучением размеров тела, рассматривая простые размеры, а именно: длины или расстояния; измерив достаточное число длин по различным направлениям, мы могли найти все, что необходимо было бы знать о размерах тела. Действительно, вполне справедливо, что знание всех расстояний, какие только могли бы быть измерены в данном теле, повлекло бы за собою знание и его формы, но, тем не менее, длина, как таковая, не является элементом формы. По отношению к форме угол занимает то же место, что длина по отношению к размерам. Другими словами, по аналогии с нашим утверждением, что два тела имеют одни и те же размеры, если всякой линии, какую можно провести в одном теле, соответствует совершенно равная ей линия в другом теле, мы утверждаем, что два тела имеют одну и ту же форму; если каждому углу, проведенному на одном из них, соответствует совершенно равный угол, проведенный на другом.

Совершенно подобно тому, как мы измеряли длины при помощи палки куска тесьмы, мы измеряем угол при помощи циркуля. Мы говорим, что два угла равны, если они совпадают с одним и тем же раствором ножек циркуля. И, таким образом, наше прежнее положение, что предмет можно переносить с места на место, не изменяя его формы сводится, как можно показать, лишь к тому, что два угла, которые совпадают в одном месте, будут совпадать также и в другом, каким бы образом они ни были перенесены с одного места на другое

§ 5. Плоскость и прямая линия.

Теперь мы должны описать частный вид поверхности и частный вид линии, которыми геометрия занимается очень много. Мы говорим о *плоской* поверхности и о *прямой* линии.

Плоскую поверхность мы можем определить как такую, которая имеет во всех своих частях и по обе стороны один и тот же вид. Это свойство плоской поверхности поясняется самим способом, которым пользуются на практике для получения такой поверхности.

Способ этот состоит в том, что берут три поверхности и притирают их до тех пор, пока каждые две из них не будут совпадать во всех точках. Предположим, что эти три поверхности—*A*, *B* и *C*; так как *A* должно совпадать с *B*, то отсюда следует, что пространство вне *A* имеет ту же самую форму, что и пространство внутри *B*; вследствие же совпадения *B* и *C* пространство внутри *B* должно быть той формы, что и пространство вне C. Далее затем, при приложении поверхности A к C, пространство внутри A должно иметь ту же форму, что и пространство вне C. Но пространство вне C должно иметь, как было показано, такую же форму, как и пространство вне A, а потому отсюда следует, что пространство вне A имеет ту же форму, что и пространство внутри A. Таким образом, если три поверхности притерты друг к другу так, что каждая пара их оказывается взаимно совпадающей, то любая из этих поверхностей представляет собой такую поверхность, которая по обе стороны имеет одну и ту же форму. Другими словами, если взять тело, в одной части ограниченное плоской поверхностью, то мы можем заставить его скользить по такой же поверхности, и оно будет повсюду с ней совпадать, при чем, если это тело обернуть и приложить к другой стороне поверхности, то совпадение будет иметь место также и здесь. Это свойство иногда выражают на языке более техническом и тогда говорят, что плоскость есть поверхность, разделяющая пространство на две *совместимые* (конгруэнтные) области.

Прямую линию можно определить подобным же образом. Прямая линия есть место раздела двух частей плоскости, при чем эти две части постольку, поскольку их получение зависит от разделяющей их линии, имеют одну и ту же форму. Иначе можно это выразить (что сводится к прежнему определению) так: прямая линия есть линия одной и той же формы по всей ее длине и по обе ее стороны.

Тело может иметь две плоские поверхности, то-есть одна ее часть может быть ограничена одной плоской поверхностью, другая—другой. Если у этих двух плоскостей есть общий край, то этот край, называемый их *пересечением*, есть прямая линия. В виду этого мы можем, если пожелаем, определять прямую линию, как пересечение двух плоскостей.

Необходимо признать, что если часть поверхности тела есть поверхность плоская, то плоскость эту следует представлять как такую, которая простирается во все стороны и за пределами тела. Так, например, верхняя поверхность стола есть плоскость, расположенная горизонтально. Вполне понятно, что можно задать вопрос относительно какой-нибудь точки, которая находится где-либо в комнате выше или ниже поверхности стола. Точки, которые выше этой поверхности, будут отделены от точек, которые расположены ниже ее воображаемой поверхности, представляющей собою продолжение плоской поверхности стола. Таким образом, мы в праве говорить о линии пересечения двух плоских поверхностей тела, независимо от того, смежны ли в действительности эти две части поверхности или нет. Мы можем во всяком случае предположить, что они друг с другом встречаются и могут быть продолжены вдоль по краю, по которому они именно друг друга пересекают.

Лейбниц, который первый дал эти определения плоскости и прямой линии, дал также другое определение прямой линии. Если мы сделаем неподвижными две точки какого-либо тела, то все тело не будет неподвижным, но будет иметь возможность вращаться. Все точки его будут изменять свое положение, за исключением тех, которые находятся на прямой, соединяющей две неподвижные точки. В соответствии с этим, Лейбниц определял прямую, как совокупность таких точек тела, которые не приходят в движение при вращении тела вокруг двух неподвижных точек. Если мы предположим, что у тела есть плоская грань, проходящая через две неподвижные точки, то это определение совпадает с предыдущим, согласно которому прямая определялась как пересечение двух плоскостей.

Едва ли нужно теперь что-либо прибавить для доказательства того, что два первые определения плоскости равнозначущи.

Другими словами, для двух поверхностей, одинаковых по форме на всем своем протяжении и с обеих сторон, линией пересечения служит линия, имеющая одинаковый вид по всей своей длине и по обе ее стороны.

Действительно, если каждую плоскость мы заставим скользить вдоль по ней самой, то такая плоскость, будучи одинаковой по форме на всем своем протяжении, будет занимать, как целое, то же самое неизменяющееся положение (то-есть там, где находилась часть плоскости раньше, там будет находиться часть плоскости, правда, отличная от первой и теперь). Таким образом, линия их пересечения занимает, если взять ее в целом, одно и то же положение (хотя части прямой, занимающие какое-нибудь определенное положение, будут в отдельных случаях неодинаковы). Поэтому, прямая одинакова по форме по всей своей длине. Подобным образом, не изменяя положения плоскостей, как целого, мы можем передвигать их так, чтобы у каждой из них часть, находившаяся справа, была бы потом расположена слева, или, чтобы верхняя часть становилась нижней. Это изменение положения плоскостей равносильно обращению линии пересечения. Но эта прямая, после того, как концы ее взаимно обменялись местами, находится на том же месте, что и раньше, а потому она должна иметь одну и ту же форму по обеим ее сторонам.

Из первого определения мы видим, что две прямые линии, совпадающие друг с другом на некотором протяжении, не могут уже разойтись в дальнейшем. Действительно, так как плоская поверхность имеет одинаковую форму по обеим сторонам прямой линии, мы можем повернуть часть этой поверхности, лежащую по одну сторону прямой, так, чтобы она совместилась с частью поверхности, лежащей по другую сторону прямой. Если сказанное правильно по отношению к одной из наших предполагаемых прямых, то, очевидно, одновременно с тем оно не может быть правильным по отношению к другой прямой, потому что теперь части плоскости, лежащие по обе стороны второй прямой, уже не могут быть одинаковыми: придется для совмещения их либо большую убавить, либо меньшую увеличить.

§ 6. Свойства треугольников.

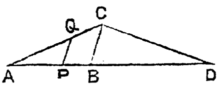
Мы можем теперь придать более отчетливое выражение нашему первому наблюдению над свойствами пространства, наблюдению, согласно которому всякое тело может перемещаться в пространстве без изменения его величины или вида. Предположим, что у нашего тела одна из граней—*треугольник*, то-есть часть плоскости, ограниченная тремя прямыми линиями. Этот треугольник, как мы найдем, можно перенести в какое-либо иное место, при чем длины его стороны и его углы останутся теми же, что раньше. Только что высказанному положению можно придать следующий вид: раз треугольник начерчен, то другой треугольник точно таких же размеров и такой же формы может быть начерчен в любом месте пространства.

Отсюда вытекает, что если у двух треугольников имеется по одинаковой стороне и если у них два угла, примыкающие к концам такой стороны в одном треугольнике, соответственно равны углам у концов равной стороны в другом треугольнике, то треугольники эти представляют собой в сущности лишь один треугольник, взятый в различных положениях; другими словами, размеры и вид их одни и те же. В самом деле, если взять первый треугольник и поместить его туда, где находится второй, так, чтобы совпали равные стороны, то вследствие равенства соответственных углов у концов этих сторон две остальные стороны первого треугольника вначале совпадут с двумя остальными сторонами другого. Но мы уже видели невозможность того, чтобы прямые линии, начавшие совпадать, потом разошлись бы; поэтому названные стороны треугольников совпадут во всех своих частях, и треугольники вполне совместятся.

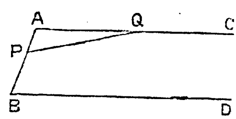
Второе наше наблюдение — о существовании предметов одной и той же формы, но не одних и тех же размеров — может приобрести также большую отчетливость путем приложения его к тому же случаю, к треугольникам. Оно гласит, что произвольный треугольник может быть увеличен или уменьшен в какой угодно степени, без изменения его углов; иначе говоря, раз начерчен один какой-нибудь треугольник, то может быть начерчен в любом месте пространства другой треугольник, имеющий те же углы и произвольные размеры.

Из этого положения мы можем вывести два чрезвычайно важных следствия. Мы находим, во-первых, что две прямые линии не могут пересекаться более, чем в одной точке; мы находим, во-вторых, что в том случае, когда две прямые, лежащие в одной и той же плоскости, проведены так, что совсем не пересекаются, углы, образуемые ими с какой-либо третьей прямой, лежащей в их плоскости и их встречающей, равны.

Чтобы обнаружить справедливость первого из этих следствий, допустим что AB и AC (черт. 18) две прямые, пересекающиеся в A. Проведем третью прямую BC, которая пересекала бы две предыдущие; три такие прямые образуют треугольник. Если точку P заставить теперь перемещаться вдоль по линии AB, то через нее, согласно второму нашему наблюдению, всегда можно провести такую прямую PQ, которая, в пересечении с прямой AC, образует треугольник APQ той же формы, что и ABC. Если же прямая AC встречалась бы с AB, кроме A в какой-либо другой точке D, то через эту точку D, очевидно, вообще невозможно провести такую прямую, которая образовала бы треугольник. Отсюда следует, что такой точки, как D, не существует и что две прямые, которые раз пересеклись, на всем остальном своем протяжении, действительно, должны только расходиться: снова встретиться они уже никогда не могут [1]). Для доказательства второго следствия, предположим, что прямые AC и BD (чертеж 19) лежат в одной и той же плоскости и расположены так, что нигде друг с другом не встречаются (в этом случае две прямые носят название *параллельных*), прямая же AB пересекает как ту, так и другую. Заставим какую-нибудь точку P перемещаться вдоль по BA по направлению к A и будем проводить через каждое ее положение прямую, которая образовывала бы с BA такой же угол, какой образован прямой BD с BA; эта движущаяся прямая может встретиться с AC только в том случае, когда она одновременно с этим с ней совершенно совпадает. Если бы было возможно обратное, то прямая PQ могла бы представить сказанное положение движущейся линии, и тогда мы бы были в состоянии провести через точку B прямую, которая вместе с AB и AC образовала бы треугольник той же самой формы, что и треугольник APQ. Но для осуществления этого прямая, проведенная через B, должна быть наклонена к AB под тем же углом, как и PQ, то-есть она должна быть прямой BD. Между тем три такие прямые, как BD, BA и AC, вовсе не могут образовать треугольник, так как BD и AC совсем не пересекаются; следовательно, у нас не может получиться такого треугольника, как APQ, или, другими словами, наша движущаяся прямая только в том случае встречает AC, когда вполне с ней совпадает. Прямая эта образует



Черт. 18.



Черт. 19.

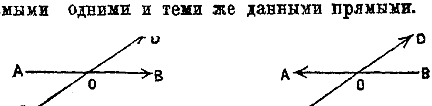
[1]) Это свойство может быть также выведено из первого определения прямой линии при посредстве приема, которым мы уже пользовались для показания, что две прямые, совпадающие в известной части их длин, не могут разойтись в дальнейшем.

с BA такой же угол, как и прямая BD, в одном из своих положений совпадая с AC, а потому отсюда вытекает, что AC образует с BA такой же угол, как и BD. Это и есть известное предложение о параллельных прямых [1]).

Первое из следствий обнаруживает пред нами тот факт, что два треугольника, имеющих по равному углу, заключенному между сторонами, которые в этих треугольниках, в свою очередь, соответственно равны, должны быть равны во всех своих частях. Действительно, если взять один из таких треугольников и наложить его на другой так, чтобы совпали равные углы и чтобы соответственно равные стороны находились одна на другой, тогда стороны, между которыми заключены углы, начнут совпадать и потому не смогут разойтись уже и далее на всем протяжении. Но так как эти стороны одинаковой длины как в одном, так и в другом треугольнике, то совпадут в обоих треугольниках концы. Благодаря этому, две остальные стороны треугольников будут иметь общие концы и потому должны будут совершенно совпасть (в противном случае, две прямые могли бы пересекаться более, чем в одной точке). Итак, один треугольник в точности покрывает другой, или, другими словами, оба треугольника равны во всех отношениях.

Подобным образом мы можем убедиться, что, если у двух треугольников два угла в одном из них соответственно равны двум углам в другом, то треугольники эти имеют один и тот же вид. В самом деле, взяв один из них, мы можем увеличивать или уменьшать его до тех пор, пока сторона, общая для двух сказанных углов, не станет той же длины, что и сторона, лежащая между соответственными углами в другом треугольнике. Так как при этом не произойдет никакого изменения в виде треугольника, то для нас достаточно будет доказать, что новый треугольник имеет ту же форму, что и другой данный треугольник. Но если мы сравним два последних треугольника, то увидим, что в них имеется пара соответственных сторон, сделанных равными, при чем углы у концов этих сторон также равны (углы эти были равны в первоначально данных треугольниках и не

[1]) Две взаимно-пересекающиеся прямые образуют в точке встречи четыре угла которые друг другу попарно равны. Часто бывает необходимо отметить различие между двумя углами, образуемыми одними и теми же данными прямыми. Это достигается путем



(I) (II)

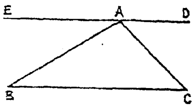
допущения, что AB означает прямую, проведенную от A к B, а BA прямую, проведенную от B к A. Таким образом углом между AB и CD (I) будет угол BOD, тогда как углом между BA и CD (II) является угол DOA. Таким образом углом между AC и BA, о котором речь была выше, будет не угол CAB (который, как это ясно, вообще говоря, не равен углу DBA), но угол CAE, где E точка, взята на продолжении BA за точкой A.

претерпели изменения при изменении размеров треугольников); это приводит нас к случаю, уже рассмотренному, где уже было обнаружено, что при таких условиях третьи углы равны. Треугольники, следовательно, имеют один и тот же вид.

Если применить эти предложения к рассмотрению не только двух различных треугольников, но и одного и того же треугольника, то окажется, что у треугольника с двумя равными сторонами противоположные этим сторонам углы также равны; обратно—у треугольника, у которого два угла равны, противоположные им стороны также равны. Это верно, потому что в каждом из этих двух случаев треугольник можно перевернуть наоборот и затем совместить его с первоначальным его положением. Такой треугольник называется *равнобедренным*.

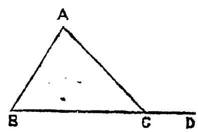
Теорема о параллельных прямых, выведенная нами из нашего второго допущения о свойствах пространства, чрезвычайно легко приводит нас к теореме особенной важности,—теореме, согласно которой три угла треугольника в своей совокупности равны двум прямым углам.

Если мы проведем через A, угол треугольника ABC (черт. 20), прямую DAE, которая со стороной AC образовывала бы такой же угол, как и BC, то прямая эта, как мы показали, никогда не встретит сторону BC, то есть будет ей параллельна. Следовательно, с AB она образует такой же угол, какой образован с AB стороной BC [1]. Таким образом три угла — ABC, BAC и BCA— соответственно равны углам EAB, BAC и CAD, а эти последние, взятые вместе, заполняют собой два прямых угла.



Черт. 20.

Иногда бывает полезным другое выражение этой теоремы. Если стороны треугольника продолжить, то образуются так называемые *внешние* углы треугольника. Если, например, мы продолжим в треугольнике ABC (черт. 21) сторону BC вправо от точки C до D, то ACD будет внешним углом треугольника, из внутренних же углов треугольника угол ACB носит название *смежного*, а углы CAB и ABC—углов *противоположных* (*не смежных*) по отношению к этому внешнему углу. Так как каждую сторону треугольника можно продолжить по двум направлениям, то для любого треугольника, очевидно, можно образовать шесть внешних углов.



Черт. 21.

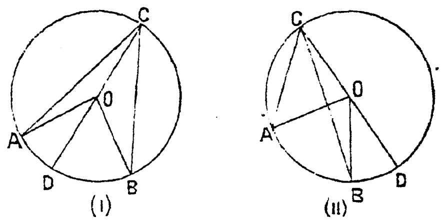
Отсюда другая форма доказанного нами предложения: *каждый из внешних углов треугольника равен сумме двух внутренних углов, с ним не смежных*. Действительно, из чертежа видно, что внешний

[1]) Необходимо вспомнить при этом об условии, о котором упомянуто в предшествующем примечании.

угол ACD вместе с углом ACB дают в сумме два прямых угла, а потому он должен быть равен сумме двух сказанных внутренних углов, которые в сложении с ACB образуют сумму, также равную двум прямым.

§ 7. Свойства кругов и системы кругов.

Рассмотренным нами предложением мы можем воспользоваться для доказательства одного важного свойства круга. А именно, если на окружности круга взять две определенных точки и соединить их с какой-либо третьей точкой окружности, то угол, образованный соединительными прямыми, зависит, как можно показать, от положения только двух первых точек, но ничуть не третьей. Если, например, соединить точки A и B (черт. 22) с C, то обнаружится, что где бы на окружности C ни находилось, угол ACB будет равняться всегда половине угла AOB, где точка O центр круга.



Черт. 22.

Пусть продолжение прямой CO пересечет окружность в точке D. Так как треугольник OAC равнобедренный, углы OAC и OCA друг другу равны, по тем же основаниям равны углы OBC и OCB.

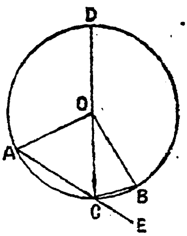
Но мы только что показали, что внешний угол AOD равен сумме углов OAC и OCA, которые, в свою очередь, равны друг другу, а потому AOD по величине есть угол в два раза больший, чем OAC или OCA. Подробным образом BOD представляет собой угол в два раза больший, нежели OCB, и, следовательно, AOB в два раза больше угла ACB.

В случае, переданном на первом чертеже (I), мы берем сумму двух углов, из которых каждый в два раза больше некоторого другого угла, и утверждаем, что сумма первой пары равна удвоенной сумме второй пары. В случае, которому соответствует второй чертеж (II), мы берем разность двух углов, каждый из которых вдвое больше некоторого другого угла, и утверждаем, что разность первой пары равна удвоенной разности второй пары.

Так как в силу этого ACB представляют собой половину AOB, в какой бы точке верхнего из двух сегментов на которые разделяется окружность прямой AB, C ни было взято, то величина этого угла зависит только от положений A и B, а не от положения C. Но рассмотрим теперь, что произойдет, если C будет находиться на нижнем сегменте круга. Как и прежде, треугольники OAC и OBC треугольники равнобедренные, углы же DOA и DOB в два раза больше углов OCA и OCB. Следовательно, весь угол AOB, образованный вращением прямой OA около точки O вплоть до перехода ея через положение OD в положение OB (то-есть вращением в сторону движения часовой стрелки), весь этот угол равен удвоенному углу ACB.

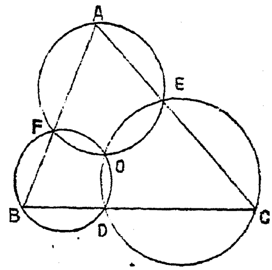
Согласно нашему рассуждению, изложенному выше, угол ADB, получаемый путем соединения A и B с D, равен половине угла AOB, образованного вращением OB до положения OA по направлению движения часовой стрелки. Сумма этих двух углов, каждый из которых мы обозначили AOB, может быть воспроизведена полным обращением около точки O или, другими словами, равна четырем прямым. Отсюда сумма углов ADB и ACB, равных половинам только что названных углов, есть два прямых угла. Эту теорему мы можем выразить иначе, сказав, что сумма противоположных углов четырехсторонней фигуры, вершины всех углов которой лежат на окружности круга, равна двум прямым углам.

Таким образом мы приходим, повидимому, к двум различным выводам в зависимости от того, на каком из двух сегментов, получающихся при пересечении круга прямой AB, лежит точка C. Но выводы эти в действительности одни и те же, и их легко облечь в одну общую форму. Если продолжить AC (черт. 23) до точки E, то сумма углов ACB и BCE равна двум прямым углам; следовательно, BCE равен ADB. Угол BCE — это тот угол, на который надо повернуть в сторону движения часовой стрелки прямую CB, для того, чтобы последняя совпала с направлением AC. Но совершенно теми же словами мы можем описать угол ACB на черт. 22, где C находится на верхнем сегменте круга. Таким образом для всех случаев мы можем выразить нашу теорему в следующих словах: если A и B определенные точки на окружности круга, а C какая-нибудь другая точка на ней, то угол, на который надо повернуть в сторону движения часовой стрелки прямую CB до совпадения ее с CA или AC (в зависимости от того, какое из этих двух положений встретится раньше), равен половине угла, на который надо повернуть в том же направлении прямую OB, чтобы привести ее в совпадение с OA.



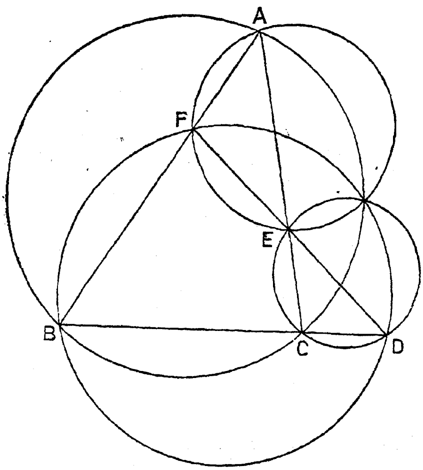
Черт. 23.

Воспользуемся теперь этой теоремой для доказательства другого интересного предложения. Если на сторонах треугольника ABC (черт. 24) взять три точки D, E и F, а именно точку D на BC, E на CA и F на AB то можно начертить три круга, проходящих соответственно через AFE, BDF и CED. Можно показать, что эти три круга пересекаются в одной и той же точке O. Будем рассматривать O сперва как пересечение двух кругов AFE и BFD; в таком случае углы FAE и OEF в сумме равны двум прямым углам, то же соображение относится к углам DOF и DBF. Но три угла, вершины которых сходятся в точке O, равны в сумме четырем прямым углам, а три угла треугольника в совокупности дают два прямых угла. Из этих шести углов две пары, как уже показано, образуют каждая по два прямых угла. Поэтому и последняя пара, то-есть углы DOE и DCE составляют в сумме также два прямых угла. Отсюда следует, что круг, который проходит через точки CED, пройдет и через O, то-есть все три круга пересекутся в одной точке.



Черт. 24.

Относительно положения точек D, E и F не внесено никаких ограничений [1]; они могут быть взяты или на сторонах треугольника или на их продолжениях, в частности мы можем выбрать их так, чтобы они лежали на некоторой четвертой прямой DEF. Если взяты какия-нибудь четыре прямые (черт. 25), одна из которых пересекает треугольник ABC, образованный тремя другими, в точках D, E, F, то окружности, проведенные через AFE, BDE и CED имеют общую точку. Но нет никаких оснований для того, чтобы не рассматривать AFE как треугольник, образованный тремя прямыми, а DCB как четвертую прямую, пересекающую стороны этого треугольника. Предложение наше в одинаковой степени верно для этого случая; отсюда следует, что круги, проведенные через ABC, ECD и FBD пересекаются в одной точке. Точкой пересечения будет та же самая точка, что и раньше, так как два круга последней системы кругов те же, что и в предыдущей совокупности кругов.



Черт. 25.

Следовательно, четыре круга пересекаются в одной точке, и мы можем придать нашему предложению следующую форму.

Если даны четыре прямые линии, то можно образовать из них четыре треугольника, оставляя для этого каждый раз одну из прямых

[1]) Если одна из точек D, E, F взята на продолжении какой-либо стороны треугольника, то доказательство, данное выше, не применимо слово в слово; необходимые изменения, однако, легки и очевидны.

неиспользованной, и вокруг каждого из этих треугольников описать по кругу, которые все пересекаются в одной точке.

Это предложение является третьим в ряде последовательных предложений.

Если взять какие-нибудь две прямые, то они определят собой точку, то-есть точку их пересечения.

Если мы возьмем три прямые, то получим три таких точки пересечения; эти три точки определяют собой круг, а именно круг, описанный около треугольника, образованного этими тремя линиями.

Четыре прямые линии дают четыре системы прямых по три в каждой путем оставления поочередно одной из прямых неиспользованной: четыре круга, принадлежащих этим совокупностям, по три прямых каждая, пересекаются в одной точке.

Точно таким же образом пять прямых дают начало пяти совокупностям прямых по четыре прямых каждая; каждая из этих совокупностей, содержащих по четыре прямых, согласно доказанной нами теореме, приводит к некоторой точке. Miquel'ем было доказано, что эти пять точек лежат на одной и той же окружности.

Этот ряд теорем, как было выяснено [1]) может быть продолжен безгранично. Шесть прямых линий определяют собой шесть совокупностей, по пять прямых в каждой совокупности, при чем каждый раз исключается одна из шести данных прямых. Каждая совокупность, состоящая из пяти прямых, по теореме Miquel'я, обладает своим кругом. Эти шесть кругов пересекаются в одной точке, и так далее. Каждым четным числом прямых ($2n$) определяется некоторая точка, являющаяся пересечением такого же числа кругов. Если взять еще одну прямую, то получающимся нечетным числом ($2n+1$) прямых определяется такое же число совокупностей по $2n$ прямых, при чем каждой из них соответствует своя точка. Эти $2n+1$ точек лежат на некоторой окружности.

§ 8. Конические сечения.

Тень круга, перед которым находится светящаяся точка, будучи отброшена на плоскую поверхность, может иметь три различных формы. Это—три кривые большого исторического интереса, три кривые чрезвычайной важности с точки зрения геометрии и ее приложений. Линии, которые нам приходилось изучать до сих пор, а именно прямая и круг, являются частными случаями этих кривых; теперь, разумеется мы уже можем приступить к исследованию незначительного числа свойств более общих образов.

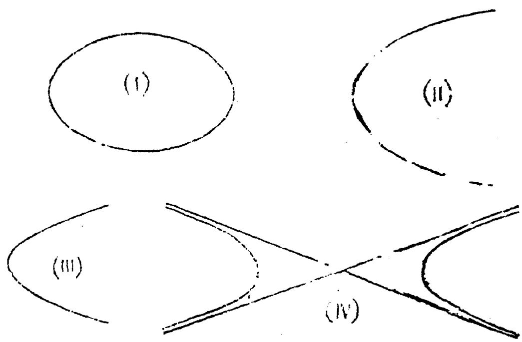
---

[1]) Доказательство принадлежит самому проф. Клиффорду: *Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics*, vol V. p. 124. Смотри его *Mathematical Papers*, стр. 51—54.

Если круговой диск держать в любом положении, но так, чтобы он весь находился ниже пламени свечи и чтобы тень от него могла падать на стол, то тень эта будет, вообще говоря, овальной формы, за исключением двух предельных случаев, когда она имеет вид круга или прямой линии. Первый из этих случаев имеет место, когда диск расположен параллельно столу, второй—когда диск держат ребром к свече, другими словами, тогда, когда он помещен так, что плоскость, в которой он лежит, проходит через светящуюся точку.

Овальная форма, которую за исключением двух указанных случаев, имеет тень, называется *эллипсом* (I). Пути описываемые планетами при их обращении вокруг солнца, имеют эту форму.

Если круговой диск поместить так, чтобы наиболее приподнятая его точка находилась как раз на уровне пламени свечи, тень попрежнему останется овальной у своего конца возле свечи, но другие две ея стороны, вместо того, чтобы смыкаться, по мере того, как мы перемещаемся по направлению от свечи, непрерывно и беспредельно, овальным закруглением расходятся в разные стороны, стремясь, однако, стать все более и более параллельными. Эта форма тени носит название *параболы* (II). К параболам весьма близко подходят по виду орбиты многих комет; с большой степенью близости параболу воспроизводит также путь, проходимый камнем, брошенным вверх не по отвесу. Если бы атмосфера не задерживала движения камня, он описал бы в точности параболу.



Черт. 26.

Если мы теперь подымем круговой диск еще выше, так, чтобы горизонтальная плоскость, проведенная на уровне пламени свечи, рассекала бы его на две части, то лишь одна часть его будет отбрасывать тень; эта тень будет иметь вид кривой, изображенной на чертеже (III): две стороны ее расходятся по противоположным направлениям, не стремясь, как в случае параболы, стать параллельными.

Но если с точки зрения физики эта кривая представляет собой всю тень, то с точки зрения геометрии она является тенью неполною. Мы можем предположить, что наша кривая получена не отбрасыванием некоторой тени, но образована посредством соединения прямыми светящейся точки с точками, расположенными по краю диска, и продолжения этих прямых до встречи с поверхностью стола.

Этот геометрический способ построения применим в одинаковой мере также к той части круга, которая находится над пламенем свечи, хотя она вовсе не отбрасывает тени. Если эти точки круга мы соединим с пламенем свечи и продолжим эти соединительные прямые по другую сторону пламени, то они встретят поверхность стола по другую сторону свечи и вычертят там кривую, которая будет в точности подобна и равна физической тени (IV). Мы можем дать ей название *подобно расположенной тени* или *геометрической тени* круга. Найдено, что с точки зрения геометрии необходимо рассматривать эти две ветви, как принадлежащие лишь одной кривой, которая называется *гиперболой*. Существует две прямые, к которым кривая приближается все более и более, по мере ее удаления от точки пересечения этих прямых, никогда, однако, с ними не встречаясь. По этой причине сказанные прямые называются *асимптотами*, греческим словом, означающим „не совпадающий". Эти прямые параллельны двум прямым, которые соединяют пламя свечи с двумя точками края круга, лежащими с пламенем свечи на одном уровне.

Несколько ранее мы видели образование поверхности движением линии. Если прямая линия при своем перемещении все время проходит через одну неподвижную точку, то поверхность, которую она описывает, называется *конусом*, а неподвижная точка его—*вершиной*. Три кривые, только что описанные нами, называются *коническими сечениями*, так как они могут быть получены путем пересечения конуса плоскостью. Действительно, именно таким способом была образована тень круга: если мы обратим внимание на прямые линии, соединяющие пламя свечи со всеми частями края круга, то мы увидим, что они образуют конус, вершиной которого является пламя свечи, а основанием—круг.

Мы должны предположить, что эти прямые не оканчиваются там, где находится пламя, но что они продолжены далее за пламя. Мы получим при этом то, что на обыденном языке называется двумя конусами, сложенными своими вершинами вместе, но что в геометрии называется *конической поверхностью* с двумя *полостями*. Пересечение этой конической поверхности с горизонтальной плоскостью стола есть тень круга. Полость, в которой круг расположен, дает нам обыкновенную физическую тень; другая же полость (если только плоскость сечения ее встречает) дает то, что мы назвали тенью геометрической.

Рассморение теней кривых представляет собой метод, которым в большой мере пользуются для разыскания свойств самих кривых, так как существуют известные геометрические свойства, которые всегда общий как какой-либо фигуре, так и ее тени. Если мы, например, начертим на куске стекла две взаимно пересекающиеся кривых, то тени этих двух кривых, отброшенные через стекло на стол, будут также пересекать друг друга. Тень прямой линии будет всегда прямой линией, так как все лучи света, проведенные из светящейся точки через различные точки прямой лежат в одной и той же плоскости, а эта плоскость пересекается с плоскостью, поверхности стола по прямой, которая является тенью первой прямой. Следовательно, если какая-нибудь кривая пересечена прямой в некотором числе точек, то и тень этой кривой пересекается с тенью прямой в том же самом числе точек. Так как окружность или пересекается с прямой линией в двух точках или не имеет с ней точек пересечения вовсе, то и всякая тень окружности должна иметь или две точки пересечения с прямой или ни одной.

Когда прямая линия касается круга, две точки пересечения сливаются в одну. Мы видим, что то же самое должно иметь место и по отношению к тени круга. Далее из точки, лежащей вне окружности можно провести две прямые, касательные к окружности; отсюда следует, что из точки, лежащей вне какой-либо из трех выше описанных кривых, можно провести две касательные к этой кривой. Из точки, находящейся внутри окружности, нельзя провести касательной к окружности, и в соответствии с этим нельзя провести касательной и к коническому сечению из точки, находящейся внутри его.

Этот способ вывода свойств какой-либо кривой из свойств другой кривой, являющейся по отношению к первой ее тенью, носит название метода *проекций*.

Особенно полезным оказывается тот частный случай применения этого метода, при котором мы предполагаем, что светящаяся точка, обусловливающая собой отбрасывание тени, находится безгранично далеко. Предположим, например, что на стол падает тень от круга, поставленного наклонно; источником же света является звезда, стоящая прямо над нами и удаленная от нас на бесконечно большое расстояние. Прямые, соединяющие звезду со всеми точками окружности, будут отвесными прямыми и образуют уже не конус, а цилиндр. Одним из главных преимуществ этого рода проекций является то обстоятельство, что в данном случае тени двух параллельных прямых остаются параллельными что, вообще говоря, при других родах проекций не имеет места. Тень круга, которую мы теперь получим, будет всегда эллипсом, и мы в состоянии при помощи упомянутого метода отыскать некоторые весьма важные свойства этой кривой, так как соответственные свойства круга видны, по большей части, сразу по причине симметричности этой фигуры.

Предположим, например, что круг, тень которого мы изучаем, поставлен вертикально; возьмем его вертикальный диаметр, тогда касательные в его концах будут горизонтальны. В силу симметрии круга ясно, что все проведенные в нем горизонтальные прямые делятся вертикальным диаметром на две равные части: иначе говоря, диаметр круга разделяет пополам все хорды, параллельные касательным, проведенным в его концах. Если свет, идущий к этой фигуре, исходит из бесконечно удаленной звезды (мы теперь не должны брать звезду, стоящую в зените: в этом случае тенью была бы прямая линия), то точка, в которой тень какой-либо прямой линии делится пополам, есть тень середины этой прямой; отсюда мы видим, что для эллипса правильно следующее положение: прямая, соединяющая точки касания двух параллельных прямых, касательных к эллипсу, рассекает пополам все хорды, параллельные этим касательным. Такая прямая, как и в круге, носит название *диаметра*. Так как тень диаметра круга есть диаметр эллипса, то отсюда следует, что все диаметры эллипса пересекаются в одной и той же точке, а именно в той точки, которая есть тень центра круга; это место общего пересечения всех диаметров называется *центром* также и в эллипсе.

Далее, так как горизонтальный диаметр только что рассмотренного круга разделяет пополам все вертикальные хорды, то мы находим отсюда, что если некоторый диаметр разделяет пополам хорды, параллельные другому диаметру, то этот последний, в свою очередь, разделит все хорды, параллельные первому.

Метод проекций приводит нас к заключению, что это свойство сохраняет свою силу и по отношению к эллипсу. Такого рода диаметры называются *сопряженными диаметрами*, но в эллипсе они пересекаются уже не под прямыми углами, как то имело место в круге

Так как тень, отбрасываемая кругом, когда источником света является бесконечно удаленная точка, будет всегда эллипсом, то мы не можем воспользоваться этим же приемом для разыскания свойств гиперболы. Но при помощи других соображений найдено, что заключения, правильность которых мы установили по отношению к эллипсу, верны и для гиперболы. Но между этими двумя кривыми, однако, большая разница. Центр эллипса находится внутри этой кривой, центр гиперболы лежит вне ее. Равным образом, в эллипсе все прямые, проходящие через его центр, пересекают кривую в двух точках, тогда как в гиперболе лишь некоторые прямые, проведенные через центр, пересекают ее. Из двух сопряженных диаметров в гиперболе один пересекает эту кривую, другой не пересекает. И тем не менее верно, что каждый из них рассекает пополам хорды, параллельные другому диаметру

§ 9. О поверхностях второго порядка.

Мы начали с рассмотрения наиболее простого рода линии и наиболее простого рода поверхности,—прямой линии и плоскости; после того мы нашли некоторые свойства четырех различных кривых линий круга—эллипса, параболы и гиперболы. Рассмотрим теперь несколько кривых поверхностей и в первую очередь поверхность, аналогичную кругу. Это—поверхность шаровая, или *сфера.* Подобно кругу, она характеризуется тем ее свойством, что все ее точки находятся на одном и том же расстоянии от центра.

Быть-может, наиболее важным вопросом, какой можно задать, говоря о поверхности, является вопрос о том, какую форму имеют кривые линии, по которым она пересекается с другими поверхностями, в особенности же в том случае, когда эти последние—плоскости: что касается до плоскости, пересекающей шар, то она пересекает его, как это легко показать, по кругу. Этот круг, по мере того, как мы будем удаляться от центра сферы, будет становиться все меньше и меньше, пока, наконец, сокращаясь, не превратится в точку. В таком случае плоскость, как говорят, *касается* шара. Отметим при этом вполне очевидный, но в то же время важный факт, а именно то, что шар целиком расположен по одну сторону плоскости. Если перемещать плоскость от центра еще далее, то тут она вовсе не будет встречать сферы.

Далее через всякую точку, лежащую вне сферы, мы можем провести ряд плоскостей, касающихся сферы; при чем все точки, в которых они касаются сферы, лежат на окружности. Равным образом может быть построен такой конус, вершина которого находится в той же точке, поверхность же касается шара по тому же кругу, что и вышесказанные плоскости. Этот конус носит название *соприкасательнаго конуса* для данной точки. Ясно, что из точки, находящейся внутри шара, не может быть построено соприкасательного конуса.

Подобными свойствами обладают также некоторые другие поверхности, сходные с шаровой поверхностью в том отношении, что они пересекаются с прямой линией не более, чем в *двух* точках; такие поверхности, в силу только что указанного обстоятельства, называются поверхностями *втораго порядка.*

Подобно тому, как можно представить себе получение эллипса из круга в виде некоторого вытяжения круга в одном направлении, так можем мы рассматривать и образование *сфероида* из сферы: для этого надо либо применить к сфере растяжение, при чем должно получиться тело, похожее на яйцо, либо сжатие, которое даст тело, напоминающее формой апельсин. Каждая из этих двух форм является симметричной по отношению к одному диаметру, но не по отношению ко всем. Например, у тела, похожаго на апельсин или на землю, диаметр, проходящий через полюса, короче любого из диаметров, взятых в плоскости экватора, но эти все диаметры в плоскости экватора друг другу равны. С другой стороны, у сфероида, напоминающого собой яйцо, диаметры, взятые в плоскости его экватора, друг другу равны, но диаметр, проведенный через его полюсы, длиннее каждого из остальных диаметров.

Если теперь мы возьмем апельсин или яйцо и превратим у них экватор из круга в эллипс, чего мы достигнем, при помощи, скажем, растяжения экватора апельсина или сдавливания экватора яйца, то поверхности эти будут иметь три диаметра под прямыми углами друг к другу, которые будут все различной длины; мы получим то, что называется *эллипсоидом.* Эта поверхность играет в геометрии поверхностей такую же роль, как эллипс в геометрии кривых. Подобно тому, как каждая плоскость, пересекающая шар, пересекает его по кругу, всякая плоскость, пересекающая эллипсоид, пересекает его по эллипсу. Правда, можно пересечь эллипсоид плоскостью так, чтобы в сечении получился круг, но такой круг следует рассматривать как частный случай эллипса, а именно, как такой эллипс, у которого оси равны.

Далее, совершенно подобно тому, как это было в случае шара, мы можем провести через точку, лежащую вне эллипсоида совокупность плоскостей, которые все касались бы эллипсоида. Точки соприкосновения расположены все на некотором эллипсе; можно построить конус, вершина которого была бы в той же внешней точке, при чем поверхность его соприкасалась бы с эллипсоидом по только что указанному эллипсу. Эллипсоид сходен с шаром также в том отношении, что когда его касается плоскость, то он весь лежит по одну сторону этой плоскости.

Существуют также такие поверхности, соотношения которых с гиперболой и параболой до известной степени походят на соотношения шара и круга, эллипсоида и эллипса. Мы рассмотрим одну из этих поверхностей,—поверхность, обладающую многими исключительными свойствами.

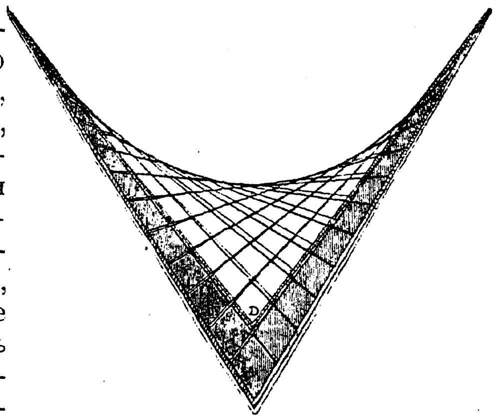
Пусть $ABCD$ представляет вырезанную из картона фигуру с четырьмя равными сторонами; пусть фигура эта наполовину надрезана по прямой BD так, что треугольники ABD и CBD могут вращаться около прямой BD. Далее сделаем вдоль по четырем сторонам фигуры ряд отверстий на равных расстояниях друг от друга, соединим эти отверстия шелковыми нитями, параллельно этим сторонам. Если теперь картон согнуть по прямой BD и притом туго натянуть шелковые нити, то получится поверхность, напоминающая собой (черт. 27) седло или верхнюю часть горного прохода.

Поверхность эта вся составлена из прямых линий, при чем существуют две системы прямых линий: линии, принадлежащие одной, были первоначально параллельны AB; линии, принадлежащие другой, были первоначально параллельны AD.

Сечение поверхности плоскостью, проходящей через AC и середину BD, представляет параболу, обращенную вогнутостью кверху.

Сечение плоскостью, проходящей через BD и середину AC, дает другую параболу, обращенную вогнутостью вниз; общая вершина этих парабол—верхняя точка нашего горного прохода.

Касательная плоскость в этой точке разделяет поверхность на две части: одна часть поверхности лежит выше касательной плоскости, другая—ниже ее. Если мы перебираемся через проход, то по одну сторону его мы поднимаемся вверх до уровня плоскости и затем по другую сторону опускаемся вниз. Но если мы будем спускаться с горы с правой стороны и далее потом подниматься на нее с левой стороны, то мы все время будем находиться над горизонтальной плоскостью. Сечение поверхности горизонтальной плоскостью, проведенной несколько выше касательной плоскости, представляет собой гиперболу, асимптоты которой параллельны прямым, получающимся при пересечении поверхности касательной плоскостью. Сечение горизонтальной плоскостью, проведенной несколько ниже сказанной верхней точки, есть также гипербола; ее асимптоты параллельны тем же прямым линиям, как и в предыдущем случае, но она расположена в другой паре углов, образованных этими асимптотами.



Черт. 27.

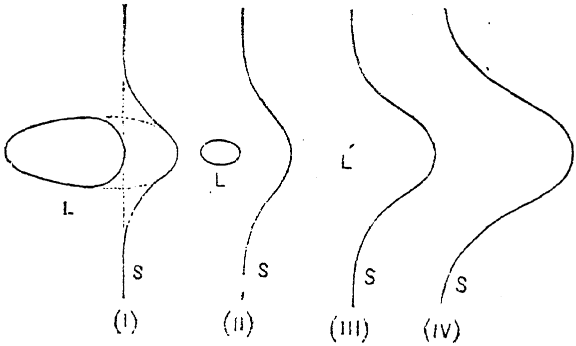
Если мы предположим, что наша плоскость, пересекающая поверхность, движется вниз (оставаясь все время горизонтальной) из некоторого положения над касательной плоскостью, то мы увидим, как две ветви первой гиперболы будут приближаться друг к другу, становясь на закруглениях все острее и острее, пока, наконец, не встретятся просто в две пересекающиеся прямые. При дальнейшем движении плоскости углы у этих прямых станут округляться; они разделятся на части по другому, чем раньше, направлению и развернутся во вторую гиперболу.

Эти превращения линий приводят нас к предположению, что пара пересекающихся прямых линий есть не что иное, как частный случай гиперболы; они также позволяют нам рассматривать гиперболу, как кривую, происшедшую от разделения двух пересекающихся прямых у их точки пересечения и округления, затем углов между ними.

§ 10. Как образовать кривую третьего и высших порядков.

Метод, изложенный в предыдущем параграфе, допускает распространение его на другие случаи: мы можем открывать форму новых кривых посредством соединения друг с другом кривых уже известных. Согласно одному способу выражения, звучащему, правда, необычно, но найденному целесообразным, прямая линия называется кривой первого порядка, так как она может быть пересечена другой прямой лишь в одной точке, совокупность же двух прямых носит название кривой второго порядка: такая совокупность прямых может быть пересечена какой-либо прямой линией в двух точках. Круг и тени его, эллипс, парабола и гипербола называются также кривыми второго порядка, так как оне могут быть пересечены прямой в двух точках, но не более, чем в двух точках. Мы видим, что одного процесса округления углов и способа проекций достаточно для того, чтобы вывести все кривые второго порядка из пары прямых.

Подобный же процесс дает нам возможность вычерчивать кривые третьего порядка. Эллипс и прямая в совокупности образуют кривую третьего порядка. Если мы округлим углы в обеих точках встречи этих двух линий, то получим (черт. 28) кривую, состоящую из овала и из извилистой части, обладающей перегибами. В совершенном соответствии с изменениями кривой, получающейся в пересечении шара с плоскостью, которая, по мере удаления плоскости от центра шара, стягивалась в точку и, наконец, исчезала, мы можем изменять и нашу кривую третьего порядка: мы можем сокращать принадлежащий к ней овал до превращения его в точку, до полного его исчезновения, так что останется только извилистая часть кривой, при чем изменения совершенно не коснутся ее изгибов.



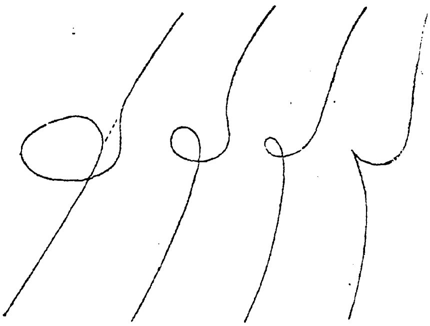
Черт. 28. I Овал и извилина. II Сокращенный овал из извилина. III Овал сжатый, превратившийся в точку. IV Одна извилина.

Мы можем, если пожелаем округлить углы лишь у одной точки пересечения прямой и эллипса; тогда мы получим кривую третьего порядка, пересекающую самое себя, образуя *узел*, или двойную точку (черт. 29). Далее мы можем предположить, что петля эта стягивается, пока, наконец, у кривой не получится *острее* (рог, или *точка возврата* [1]).

Ньютон показал, что все кривые третьего порядка могут быть получены, как тени пяти видов кривых, нами только что названных,

[1]) В оригинале стоит слово cusp—рог луны. Иногда точку возврата называют куспидольной точкой (*прим. переводчика*).

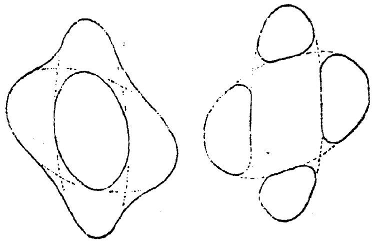
а именно: овала и извилистой кривой с точками перегиба, точки и кривой с извилиной, одной извилистой кривой, кривой с узлом и кривой с точкой возврата.



(I) (II) (III) (IV)

Черт. 29.

Точно таким же образом кривые четвертого порядка могут быть получены путем сочетания двух эллипсов (черт. 30).



Черт. 30.

Если взять тот случай, когда два эллипса пересекают друг друга в четырех точках, и округлить углы сразу у всех четырех точек встречи, то получится два различных вида кривых: или четыре овала, находящихся вне друг друга, или же овал, вдавленный в четырех местах, внутри которого находится другой овал.

Число типов кривых четвертого порядка, однако, настолько велико, что не составлено даже полного их списка, а кривые высших порядков обладают еще большим разнообразием видов.

ГЛАВА III.

Величина.

§ 1. Измерение величин.

Мы рассмотрели в начале первой главы о числе процесс счета предметов, которые могут быть взяты отдельно друг от друга, как-то: буквы, люди, овцы; мы нашли, что основным свойством этого счета является то положение, что результат счета не зависит от порядка, в котором были взяты предметы, подлежавшие подсчету, то-есть, что каждый из предметов на любой стадии этого процесса имеет такое же значение, как и всякий другой.

Мы можем считать также такие предметы, которые не отделены друг от друга, но связаны в одно. Например, мы можем сказать, что ширина комнаты шестнадцать футов. Для того, чтобы подсчитать число футов, соответствующее ширине комнаты, мы, по всей вероятности, возьмем футовую линейку и отметим один фут, первый фут, прикладывая линейку вплотную к стене; второй фут мы отмериваем от того места, где был конец первого фута; так продолжаем до тех пор, пока не достигнем противоположной стены. Когда эти деления нанесены, мы можем подсчитывать отдельные расстояния в один фут, как и всякие другие отдельные предметы, в каком угодно порядке, и число футов всегда окажется равным шестнадцати.

Но сказанным еще не исчерпывается все возможное разнообразие в процессе счета. В самом деле, предположим, что нами взята палка, длина которой равняется ширине комнаты. Мы можем отрезать от нее в какой угодно ее части один фут и оставшиеся куски соединить концами. Если мы теперь отрежем от остающейся части в каком угодно месте ее еще один фут, снова соединим концы и повторим этот процесс всего пятнадцать раз, то по соединении концами последних из оставшихся кусков мы найдем, что куски эти, будучи взяты вместе, всегда имеют в длину один фут. Таким образом, когда процесс счета прилагается к предметам, которые в совокупности представляют собой нечто целое, в роде длины палки или ширины комнаты, несущественным является не только порядок, в котором мы считаем футы, но и действительное положение, занимаемое этими подсчитываемыми нами футами.

Равным образом, если мы говорим, что в данной упаковке заключается фунт, или, иначе, тридцать два лота, чаю, то мы понимаем, что если мы возьмем отсюда один лот чаю, затем из того, что останется,—второй и так далее, до тех пор, пока не будет взят тридцать один лот, то всегда останется один лот.

Если я говорю, что я писал пятнадцать минут, то, разумеется, невозможно произвести в действительности подсчет этих минут в каком-либо ином порядке, чем тот, в котором они в своем течении следовали одна за другой. Тем не менее, верно будет и то, что если из всего этого промежутка времени выделить как угодно четырнадцать отдельных минут, то остаток, образуемый промежутками между этими отдельно взятыми минутами, в целом будет равен одной минуте.

Во всех этих случаях мы производили подсчет предметов, которые были соединены в нечто одно. Мы нашли при этом, что мы можем по произволу изменять не только порядок счета, но и самые подсчитываемые предметы, не изменяя тем результата. Процесс этот называется *измерением величин*.

Предположим, что при измерении ширины комнаты мы найдем, что она равна не в точности шестнадцати футам, но что она несколько больше шестнадцати футов, что она, положим, равна шестнадцати футам и пяти дюймам. Если это так, то для измерения этого придатка нам достаточно повторить тот же самый процесс, что и раньше, только вместо того, чтобы подсчитывать футы, мы будем считать дюймы, которые меньше футов. Если окажется, что ширина не выражается точным числом дюймов и что после отсчета пяти дюймов еще есть остаток, то остаток этот мы можем измерить в восьмых долях дюйма, в нем, например, может содержаться три восьмых дюйма. У нас нет уверенности в том, что процесс измерения на этом можно закончить, так как может оказаться, что ширина комнаты не представляется также и точным числом восьмых долей дюйма. Но все же можно сказать, что никому нет надобности знать ширину комнаты с точностью большей, чем до одной восьмой дюйма.

Далее затем, при измерении некоторого количества чая может оказаться, что оно равно не точно тридцати двум лотам, но лишь приблизительно; может-быть, окажется, сверх этого, еще некоторое количество чаю. Эту часть мы измерим в золотниках. Как и раньше, мы повторяем тут тот же самый процесс, какой применяли по отношению к предметам, соединенным в одно целое, но только теперь мы подсчитываем число золотников, которые меньше лотов. Может случиться, что в данной упаковке окажется неточное число золотников, но никому нет необходимости знать в данном случае вес с точностью, большей, нежели до одного золотника.

То же самое необходимо иметь в виду и по отношению ко времени. Геологический период, если мы пожелаем быть очень точными, может быть оцениваем сотнями столетий, продолжительность войны мы можем выразить в годах, время отхода поезда—с точностью до одной минуты, момент наступления затмения—с точностью до одной секунды. В каждом отдельном случае мы должны озаботиться лишь о том, чтобы измерение было достаточно точно для той цели, которую мы себе ставим.

Подведем итог. Обычно пользуются грубым или приближенным способом описания величин, состоящим в том, что указывают, сколько раз в величине, которую намерены описать, содержится некоторая другая величина, принимаемая за образец (за меру), а тем, что остается сверх этого, тем, что меньше образцовой величины, пренебрегают. Чем меньше величина, принимаемая за меру, тем точнее процесс, который, вообще говоря, есть не что иное, как приближенное определение.

Но как же поступить нам в том случае, когда нам необходимо описать какую-либо величину не по приближению только, но уже точно? Словами выполнить этого нельзя никоим образом,—единственно, что возможно, это принести либо самое величину, либо какую-нибудь другую величину, которая в состоянии представить первую. Например, для того, чтобы представить точную длину и ширину комнаты, мы можем начертить эту комнату, в масштабе, скажем, одного фута в дюйме, и принести этот чертеж.

Здесь мы представляем длину при помощи длины, но нет никакой необходимости представлять вес единицами веса, а время единицами времени,—на деле оба рода этих величин представляются длинами. Когда химик, желая сделать взвешивание с большей точностью, уже приблизился к искомому весу, насколько это было возможно при помощи миллиграммовых разновесок, которые он кладет на чашку своих весов, он вешает небольшой рейтер на коромысло весов: расстояние рейтера от середины коромысла показывает, насколько вес тела превышает вес положенных разновесок. Если предположить, что весы совершенно верны и что исключена возможность трения и всякого другого источника ошибки, то сказанное расстояние указывает вес действительно точно.

Итак, мы имеем здесь дело с случаем, в котором вес указывается длиной, а именно расстоянием от середины коромысла до того места, где находится рейтер. Далее, время мы обыкновенно передаем при помощи часов, минутная стрелка которых перемещается последовательно, но небольшими скачками, совершающимися, скажем, два раза в секунду. Такие часы будут отсчитывать время по полминутам и не дадут нам никаких указаний о промежутках времени, меньших, чем этот. Но мы легко можем представить себе часы, в которых движение минутной стрелки совершается беспрерывно, а не скачками. В этом случае время, протекшее от окончания последнего часа, в точности представляет длину части внутренней окружности часов, части, отсчитываемой от верхней части круга до той точки, на которую указывает минутная стрелка. Мы замечаем при этом, что величина, которая отмерена нами таким путем при помощи некоторой длины, является не всей величиной, подлежавшей оценке, но лишь частью, оставшейся после того, как большая часть была уже измерена при помощи сравнения с некоторой другой величиной, послужившей образцом.

Мы можем таким образом описывать вес, время и даже другие величины какого бы то ни было рода при помощи длин линий. Поэтому во всем последующем мы будем говорить о величине лишь как о длине, так как последняя вполне передает все измеряемые предметы какого бы то ни было рода.

§ 2. Сложение и вычитание величин.

Для сложения двух длин достаточно расположить их на одной и той же линии и затем просто приложить друг к другу концами. Мы должны отметить, как и в случае счета, что здесь возможность разнообразить способ сложения при сложении двух величин значительно больше, нежели при сложении двух чисел. Действительно, каждая из двух длин, совокупность которых мы хотим измерить, может быть разрезана на любое число частей, а части эти могут быть присоединены к другой длине в каких угодно ее точках, результат же сложения будет всегда один и тот же.

То же самое, быть-может, с большей отчетливостью можно установить, воспользовавшись идеей „поступов". Предположим, что у нас имеется прямая, на которой отмечена точка, принимаемая за начало. Кроме того, на той же прямой нанесен ряд делений на равных расстояниях друг от друга и обозначенных числами 1, 2, 3, 4... Тогда каждое отдельное число можно обозначить, поставив на прямой на соответственном месте точку с указателем, и для того, чтобы к этому числу прибавить какое-нибудь число или чтобы отнять от него какое-нибудь число, достаточно указатель передвинуть вперед или назад на соответственное число делений. Но в случае длин мы не связаны определенными местами, обозначенными на разделенной линии. Каждая длина может быть воспроизведена передвижением указателя на место, расстояние которого от начала равно рассматриваемой нами длине (между двумя точками, соответствующими последовательным числам, таких мест может быть сколько угодно); другую длину мы прибавляем или отнимаем, заставляя указатель пройти вперед или назад столько-то „ступеней".

Без особых пояснений видно, что для величин вообще, как и для чисел, в совокупности указанных „поступов", поступы эти можно брать в любом порядке, не изменяя тем результата.

§ 3. Умножение и деление величин.

Мы уже рассмотрели случаи, в которых величина была *умножаема*, то-есть те случаи, в которых известное число равных величин было сложено вместе: этот процесс называется *умножением* одного из таких количеств на это число. Таким образом, длина в шестнадцать футов является результатом умножения одного фута на число шестнадцать.

Мы можем задать теперь обратный вопрос: какое число надо взять для того, чтобы, по умножении на него одной из двух данных величин, получилась бы другая? В том, что мы говорили об измерении величин, в скрытом виде содержится указание, что только в частных случаях можно найти число, отвечающее на этот вопрос. Если, например, мы спросим, на какое число надо умножить фут для того, чтобы получилось пятнадцать футов, то перед тем, как ответить на это, нам придется изменить и расширить смысл самого слова „число". Мы знаем, что для получения пятнадцати дюймов один дюйм должен быть умножен на число пятнадцать. Мы можем поэтому спросить: на какое число надо умножить один фут для того, чтобы получился один дюйм.

Для того, чтобы обратить один фут в пятнадцать дюймов, мы должны пройти через следующий процесс: мы должны разделить фут на двенадцать равных частей и взять пятнадцать таких частей; короче говоря, мы должны разделить фут на двенадцать и помножить на пятнадцать. Мы можем прийти к тому же самому результату, выполняя наш процесс в другом порядке: мы можем сперва умножить фут на пятнадцать, так что у нас получится пятнадцать футов, а затем разделить эту длину на двенадцать равных частей, каждая из которых будет равна пятнадцати дюймам.

Если теперь вместо того, чтобы изобретать новое название для этой сложной операции, мы предпочтем назвать его старым именем умножения, мы будем в праве говорить о таком умножении одного фута, в результате которого получается пятнадцать дюймов. Операция умножения на пятнадцать и деления на двенадцать письменно передается так: $\frac{15}{12}$. Таким образом для обращения одного фута в пятнадцать дюймов мы умножаем фут на *дробь* $\frac{15}{12}$. В этой дроби верхнее число (15) называется *числителем*, нижнее (12)—*знаменателем*.

Вспомним, что в первой главе мы выяснили, что формулы арифметики и алгебры допускают двойное истолкование. Например, такой символ, как 3, обозначает прежде всего число (букв, людей или какихнибудь других предметов), но затем он рассматривается нами в смысле указания на известную операцию, а именно, на операцию утраивания чего бы то ни было. Равным образом и символ $\frac{15}{12}$ может быть принят или в том смысле, что надо взять от фута „столько-то", или как обозначение операции, при помощи которой мы изменяем один фут в пятнадцать дюймов.

Степень, в какой одна величина больше или меньше другой, или скажем, чтобы точнее поставить дело, *размер растяжения или сжатия* [1]), какие надо приложить к одной из величин, чтобы из нея получить другую, называется *отношением* двух величин. Если a и b две какие-либо длины, то отношения a к b есть операция растяжения или сжатия, при посредстве которой b можно сделать равным a. Эта операция может быть всегда представлена по приближению (а иногда и точно) при помощи чисел.

§ 4. Арифметическое выражение отношений.

Для приближенного выражения отношений имеется два способа. При применении обоих этих способов, как при всяком измерении величин, мы пользуемся различными мерами, выбирая постепенно, чем более мы подвигаемся вперед, меры все меньшие и меньшие. В первом из этих способов меры выбираются согласно некоторому определенному закону; во втором же в нашем выборе мы руководствуемся тем частным отношением, к которому нас приводит самое измерение.

Первый способ состоит в том, что мы пользуемся рядом мер, каждая из которых представляет десятую долю предыдущей. Таким образом для того, чтобы выразить отношение пятнадцати дюймов к одному футу, мы поступаем следующим образом: в пятнадцати дюймах фут содержится один раз, и сверх того остается еще кусок, длина которого равна трем дюймам, или четверти фута. Эту четверть фута мы измеряем далее в десятых долях фута и находим, что она равна двум десятым фута с некоторым остатком, который, как оказывается, представляет собой половину десятой доли фута. Так что, если бы мы решили пренебречь этой половиной десятой доли, мы сказали бы, что наше отношение равно 12 десятым, что можно написать в виде 1, 2. Если же мы этой половиной десятой доли фута не пренебрегаем, то ее надо будет измерить в сотых долях фута: таких сотых в ней содержится ровно 5. Таким образом в результате получится в точности 125 сотых, или 1,25.

Попробуем теперь выразить длину диагонали квадрата в долях его стороны. Мы находим тотчас же, что сторона квадрата содержится в диагонали один раз с остатком; таким образом искомое отношение представится 1 с некоторой дробью. Если остаток измерим в десятых

---

[1]) Профессор К. Пирсон указал переводчику, что неоднократно встречающиеся в дальнейшем изложении термины stretch и squeeze надо понимать в том смысле, какой придает им теория упругости. (*Прим. переводчика*).

долях стороны, то мы найдем, что в нем содержится четыре таких десятых с остатком. Таким образом отношение диагонали к стороне приближенно может быть выражено числом 14 десятых или 1,4. Если оставшуюся часть измерить в сотых долях стороны, то мы найдем, что в ней содержится одна сотая стороны и, сверх того, еще кусок. Таким образом 141 сотая, или 1,41, является более точным описанием отношения, нежели предыдущее. Далее можно показать, что в этом остающемся после последнего измерения куске содержится четыре тысячных стороны и новый остаток. Мы приходим к более точному значению отношения, а именно к 1414 тысячным, или 1,414, и процесс этот можем продолжать далее до достижения той степени точности, какая только потребуется. В настоящем случае, в отличие от случая, рассмотренного выше, процесс измерения не закончится никогда, так как отношение диагонали квадрата к его стороне принадлежит к числу таких отношений, которые не могут быть точно выражены при посредстве чисел.

Другой способ приближенных вычислений отличается от только изложенного в том отношении, что выбираемые нами последовательно все меньшие и меньшие меры, в которых мы выражаем последовательные остатки, представляют собой не некоторые установленные наперед величины, как дюйм, десятая доля дюйма, сотая доля дюйма и т. д., но такого рода доли, которые указывают нам самим приближенным вычислением по мере его развития.

Как и раньше, мы начинаем с того, что определяем сколько раз меньшая величина содержится в большей, определяем, скажем, сколько раз сторона квадрата содержится в его диоганали. В ответе получается, что она содержится один раз с остатком. Возьмем этот остаток a и посмотрим, сколько раз этот остаток a содержится в стороне квадрата. Оказывается, что он содержится здесь дважды и, сверх того, имеется остаток, который будет назван нами b. Найдем, сколько раз b содержится в a. Мы знаем, что опять два раза, при чем получается остаток, скажем, c. Процесс этот мы повторяем или сколько угодно раз, или до тех пор, пока уже не получится никакого остатка. В данном же случае мы найдем, что каждый остаток содержится в предыдущем остатке два раза с лишним.

Рассмотрим теперь, каким образом этот процесс дает нам возможность находить последовательные приближения величины отношения диагонали квадрата к его стороне.

Предположим сначала, что кусок a представляет собой ровно половину стороны, то-есть, что мы можем пренебречь остатком b. Тогда диагональ была бы равна стороне квадрата, сложенной с половиной той же стороны, то-есть была бы равна трем вторым этой стороны.

Включим в наше приближенное вычисление b, в то же время не принимая в расчет c, другими словами, предположим, что b равно в точности половине a. Тогда в стороне квадрата будет содержаться два раза a и, сверх того, еще половина a, всего, значит пять вторых a, иначе говоря, a представляет собой две пятых стороны квадрата. Но в диагонали содержится сторона квадрата и, сверх того, a, то-есть сторона квадрата и две пятых этой стороны, или семь пятых стороны. Длина, которой мы пренебрегаем, будет меньше, нежели b, само же b есть одна пятая стороны квадрата.

Включим теперь в наше приближенное вычисление c, предположив, что c равно точно половине b. Так как в a длина b содержится два раза с остатком, равным c, то a равняется пяти вторым b или, обратно b равно двум пятым a. Отсюда мы видим, что в стороне квадрата содержится два раза a и, кроме того, две пятых a; диагональ равна сумме стороны и a,—другими словами, равна семнадцати двенадцатым стороны. Приближенное значение это в свою очередь более точно, нежели предшествующее, так как отбрасываемая нами длина меньше c, равного половине b, которое равно двум пятым a (a равно пяти двенадцатым стороны квадрата). Таким образом отбрасываемая величина меньше одной двенадцатой стороны квадрата.

Продолжая этот процесс, мы можем найти приближенное значение отношения с требуемой степенью точности.

Первый способ приближенных вычислений называется способом *десятичных дробей*, второй—способ *дробей непрерывных.*

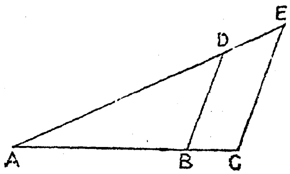
§ 5. Четвертая пропорциональная величина.

Одним из главных отличий величин и чисел друг от друга является то обстоятельство, что деление нацело одного числа на другое возможно лишь в том случае, когда первое число является как раз кратным второго, в случае же величин, каждую величину (мы обыкновенно так это и принимаем) можно разделить на какое угодно число, другими словами, всякую длину—всевозможные величины мы изображаем длинами—можно разделить на любое заданное число равных частей. Но раз в этом случае всегда возможно деление, должна быть всегда выполнимой и та сложная операция умножения и деления, которую мы назвали „умножением на дробь". В самом деле мы можем найти не только две пятых фута, но и две пятых какой-нибудь другой произвольно нами выбранной длины.

Теперь сам собой возникает следующий вопрос: может ли быть прилагаема общая операция увеличения или уменьшения, которую мы назвали *отношением*, с одинаковым правом ко всем величинам. Если у нас есть три величины a, b, c, то осуществима некоторая операция растяжения или сжатия, при помощи которой a обратится в b. Спрашивается, можно ли ту же самую операцию произвести над c с тем, чтобы в результате получалась такая величина d, что отношение c к d

равнялось бы отношению a к b. Мы допускаем, что такая величина — *четвертая пропорциональная*, как ее называют,—всегда существует. Это допущение положено в основу всех дальнейших наших математических исследований, и потому оно представляется настолько важным, что заслуживает более подробного изучения.

Мы находим, что в действительности допущение это замечается во втором из двух предположений, сделанных нами в главе о пространстве, а именно в том, где мы говорим, что можно строить фигуры одной и той же формы, но различных размеров. При рассмотрении этого вопроса, мы нашли, что можно ограничиться случаем треугольников различных размеров, имеющих в то же время соответственно равные углы. Мы показали, что каждый треугольник может быть превращен в другой такой же формы, как и первый, путем одинакового увеличения его всех трех сторон; другими словами, если два треугольника имеют одни и те же углы, отношения трех сторон одного треугольника к соответственным сторонам другого треугольника равны. Ясно, что если это верно, то задача о разыскании четвертой пропорциональной сводится к вычерчиванию двух треугольников одинаковой формы. Так, например, пусть AB и AC первые две данные величины, пусть AD (черт. 31) будет третьей величиной; требуется найти такую величину, которая была бы получена из AD посредством такой же операции растяжения, какая необходима, чтобы AB превратить в AC. Соединяем прямой точки B и D и проводим прямую CE, образующую угол ACE, равный углу ABD. Два треугольника ABD и ACE имеют одну и ту же форму, следовательно, треугольник ACE может быть получен из ABD путем одинакового растяжения всех его сторон. Иначе говоря, удлинение, которое превращает AB в AC, совершенно такое же, как то растяжение, при помощи которого AD делается равным AE. В силу этого AE и будет искомой четвертой пропорциональной.



Черт. 31.

Для того, чтобы придать этим соображениям большую ясность, полезно выработать более точное понимание того, что мы называем четвертой пропорциональной. До сих пор мы описывали четвертую пропорциональную как нечто такое, что получается из AD путем того же процесса, который превращает AB в AC. Но каким способом указать, что процесс, совершающийся в общих случаях, один и тот же. Мы могли бы, если бы пожелали, дать геометрическое определение этого процесса, основанное на только что изложенном построении, и сказать, что отношение AD к AE может быть названо „равным“ отношению AB к AC в том случае, когда два треугольника одинаковой формы будут иметь соответственными сторонами длины AB,

AD, AC и AE. Но лучше, если только есть возможность, излагать учение о величине отдельно от учения о пространстве и найти какое-нибудь такое определение четвертой пропорциональной, которое основывалось бы на одном только понятии величины. Такое определение было найдено, и представляется чрезвычайно важным отметить источник этого определения. Важно это потому, что мы найдем, что необходимо дать сходные определения для всех других величин, существование которых обусловливается тем, что называется *принципом непрерывности*. Этот принцип есть попросту допущение, нами уже высказанное, согласно которому все величины могут быть разделяемы на любое число равных частей.

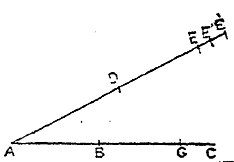
Если мы применим к одной и той же величине две различные операции растяжения, то ту из операций, которая даст больший результат, мы, понятно, будем рассматривать как такую, которая при одинаковых условиях будет производить всегда большее действие. Наше определение четвертой пропорциональной мы будем основывать теперь на следующем чрезвычайно естественном допущении: если два процесса распряжения прилагаются к двум *различным* величинам, то процесс, сопровождающийся большим результатом в одном случае, даст больший результат и в другом случае.

Предположим, что мы сделали попытку приближенно определить отношение AC к AB и нашли, что AC заключается между семнадцатью двенадцатыми и восемнадцатью двенадцатыми AB. У нас имеется, значит, следующих два процесса растяжения, которые могут быть приложены к AB: процесс, обозначенный $\frac{17}{12}$ (т.-е. процесс умножения на 17 и деления на 12) и процесс, обращающий AB в AC. Результат первого процесса, согласно нашему предположению, меньше результата второго процесса, так как AC больше семнадцати двенадцатых AB. Приложим теперь эти два процесса к AD. Первый дает семнадцать двенадцатых AD, в результате же последнего получится искомая четвертая пропорциональная. Следовательно, четвертая пропорциональная должна быть больше семнадцати двенадцатых AD.

Но ведь мы знаем, что AC меньше восемнадцати двенадцатых AB. Поэтому операция, благодаря которой из AB получается AC, дает меньший результат, чем операция умножения на *18* и деления на *12*. Произведем теперь обе эти операции над AD. Мы увидим, что искомая четвертая пропорциональная меньше восемнадцати двенадцатых AD. Сказанное остается в силе и по отношению к каким угодно дробям, и потому добытый нами результат мы можем представить в следующей общей форме:

Подобно тому, как AC больше или меньше некоторой определенной дроби AB, так и четвертая пропорциональная (если только она существует) будет больше или меньше той же самой дроби, но взятой от AD. Но теперь мы можем показать, что отмеченное нами свойство уже само по себе в состоянии без двусмысленности определить четвертую пропорциональную, другими словами, мы покажем, что не может быть в одно и то же время двух различных длин, удовлетворяющих поставленному нами условию.

Допустим, если только это возможно, что у нас имеется таких две длины AE и AE', что каждая из них является четвертой пропорциональной к AB, AC, AD (черт. 32). Если взять достаточное число отрезков, равных EE', то в сумме их может получиться длина, большая AD. Предположим, что сумма пятисот таких отрезков немногим меньше длины AD, и что пятьсот один такой отрезок уже больше AD. В таком случае, разделив AD на пятьсот одну равную часть, мы найдем, что каждая из таких частей меньше EE'. Далее, если мы станем отмечать на прямой DE от D до E один за другим отрезки, равные только что указанным малым долям AD; то одна из точек деления упадет между E и E', так как EE' больше расстояния между двумя такими точками деления. Пусть эта точка деления будет точкой F. Тогда AF получится из AD путем умножения на то или другое число и последующего затем деления на 501. Если тот же самый процесс мы приложим к AB, то придем к длине AG, которая может оказаться либо большей AC, либо меньшей. Если она меньше AC, то операция, при посредстве которой длина AB переходит в длину AG, характеризуется меньшим размером удлинения, чем операция, обращающая AB в AC. Следовательно, операция, из AD делающая AF, представляет собой меньшее растяжение, чем та, которая из AD делает AE, и меньшее растяжение, чем та, которая вместо AD дает AE'. Поэтому AF должно быть меньше AE, а также меньше AE', что невозможно, так как F лежит между E и E'. Рассуждение было бы сходно с только что проведенным и в том случае, если бы мы предположили, что AG больше AC.



Черт. 32.

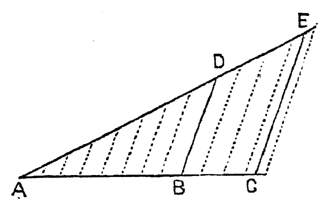
Таким образом мы доказали, что существует только одна длина, удовлетворяющая требованию, чтобы процесс превращения в нее AD был больше всех тех дробей, которые меньше, нежели процесс превращения AB в AC, и меньше всех дробей, больших этого процесса.

Рассмотрим более тщательно характер этого определения.

Прежде всего мы утверждаем, что если взять какую-нибудь дробь, которая была бы больше отношения AC к AB, то такая дробь будет также больше отношения AE к AD; если же эта дробь будет меньше отношения AC к AB, то она будет меньше и второго отношения.

Это та сторона определения, в справедливости которой можно удостовериться на частном случае какой угодно дроби. Если бы нам сказали, что длина AE четвертая пропорциональная, мы могли бы установить, подчиняется ли она высказанному нами правилу по отношению к какой либо данной дроби. Но если эта длина, действительно, четвертая пропорциональная, то она должна удовлетворять сказанному требованию по отношению ко всем каким бы то ни было дробям. Непосредственно удостовериться мы не можем в этом, но мы должны бы располагать такого рода доказательством, которое не только показывало бы, что величина, являющаяся по предположению четвертой пропорциональной, следует известному правилу в отношении к частному случаю одной какой нибудь дроби, но было бы приложимо без изменения ко всякой другой дроби. В таком случае мы докажем не только факт существования четвертой пропорциональной, но и то, что данная частная величина есть именно четвертая пропорциональная. Действительно, мы можем дать такого рода доказательство, воспользовавшись для этого свойством сторон подобных треугольников.

Если длину AB (черт. 33) разделить на произвольное число равных частей и черточки деления провести прямые, образующие с AB тот же угол, какой образует с ней BD, то прямые эти рассекут на равные части также и отрезок между D и E. Если какая либо из этих прямых, идя от линии AC к линии AE, пересекает первую из этих линий в точке, находящейся между C и A, то она пересечет вторую в точке находящейся между E и A. Это потому, что треугольник, образуемый этой прямой и линиями AC и AE, должен иметь ту же форму, что и треугольник ACE. Равным образом каждая из таких прямых, пересекающих AC по другую сторону от C, по сравнению с прежними встретит AE по другую сторону от E, нежели в первом случае.



Черт. 33.

Рассматривая теперь различные дроби AB, отмеченные на этой длине, мы отчетливо видим, что если одна из этих дробей меньше AC, то соответствующая ей дробь меньше AE; если же она больше, то и та будет больше.

Отсюда следует, что прямая AE, получающаяся путем такого построения, удовлетворяет по отношению к каждой из дробей, какую бы мы не выбрали, условию, необходимому для того, чтобы быть четвертой пропорциональной. Следовательно, если верно второе допущение относительно свойств пространства, принятое нами, то всегда существует четвертая пропорциональная, и описанный процесс дает нам возможность ее найти.

Тем не менее, против определения, данного нами для четвертой пропорциональной, можно сделать одно возражение. Точнее говоря, возражение это относится к одному пункту нашего определения, который, однако, мы можем превратить в более прочное основание для учения об отношениях. Дело в том, что мы принимаем, что величины непрерывны, т.-е., что каждая величина может быть разделена на любое число равных частей, и допущение это в скрытом виде заключается в процессе, при посредстве которого мы берем ту или другую числовую дробь от некоторой величины.

Мы, например, говорим, что a, b, c, d величины пропорциональные если при этом a больше, нежели три пятых b, то и c будет больше три пятых d. Но самый процесс нахождения трех пятых b является одним из двух следующих процессов. Мы либо разделяем b на пять равных частей и берем три таких части, либо умножаем b на три и результат разделяем на пять равных частей (мы, конечно, знаем, что эти два процесса приведут нас к одному и тому же результату). В обоих этих случаях мы допускаем, что мы можем разделить данную величину на пять равных частей.

Представляется желательным, чтобы определение содержало в себе возможно меньше допущений. В силу этого греческие геометры при определении понятия пропорции, или (что в сущности одно и то же) при определении понятия четвертой, пропорциональной трем данным величинам, пытались избегнуть этого допущения.

Но сделать это не затруднительно. Рассмотрим тот же самый пример. Мы говорим: раз a больше трех пятых b, то c больше трех пятых d. Умножим теперь обе величины a и b на пять. Так как a больше трех пятых b, то величина, которая теперь получилась вместо a, должна быть больше трех пятых величины, которая стоит на месте b. Другими словами, если новое b разделить на пять равных частей, то новое a должно быть больше, чем три таких части. Но каждая из этих пяти равных частей представляет собой не что иное, как начальное b; таким образом наше положение об относительных величинах a и b однозначаще с положением, что пять раз взятое a больше утроенного b; те же соображения имеют место и по отношению к c и d.

Каждая дробь предполагает наличность двух чисел. Она представляет собой сложный процесс умножения на одно число и деления на другое; отсюда ясно, что мы можем придать эту новую форму нашему правилу о четвертой пропорциональной не только в данном частном случае трех пятых, но и в случае общем. В силу этого, если m раз взятое a больше или меньше n раз взятого b, то и m раз взятое c больше или меньше n раз взятого d, где m и n произвольные целые числа.

В последней именно форме это правило дано греческими геометрами. В этом случае, как очевидно, оно не зависит от непрерывности рассматриваемых величин, так как независимо от того, верно ли, что мы можем разделить данное число на указанное число равных частей или нет, мы, разумеется, можем взять какое угодно кратное от него.

Итак, основные идеи — идеи отношения, равенства отношений и свойства четвертой пропорциональной величины определены теперь в их общей форме и по отношению к величинам какого угодно рода, а не по отношению к одним только длинам, при единственном лишь условии, что мы всегда можем образовать любое кратное каждой данной величины.

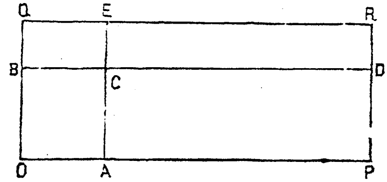
§ 6. О площадях; их растяжение и сжатие.

Теперь мы приступим к приложению этих идей к площадям или величинам поверхностей, в частности к площадям плоских фигур. Наиболее простой из площадей в целях измерения является площадь прямоугольника. Нахождение величины площади прямоугольника во многих случаях представляет собой процесс, тождественный с перемножением чисел. Например, прямоугольник, длина которого равна 7 дюймам, а ширина — 5 дюймам, содержит 35 квадратных дюймов, что следует из наших основных идей о перемножении чисел. Но этот процесс, процесс перемножения чисел, приложим лишь в том случае, когда мы знаем, сколько раз единица длины содержится в каждой из сторон прямоугольника; в этом случае умножение укажет нам, сколько раз площадь прямоугольника содержит в себе площадь квадрата, построенного на единице длины.

Предстоит найти способ, который можно было бы прилагать к вычислению площади прямоугольника во всех случаях.

С этой целью заметим прежде всего, что при удлинении или при укорочении в известном отношении одной из сторон прямоугольника, другая сторона которого в это время имеет постоянную длину, площадь прямоугольника увеличивается или уменьшается точно в таком же отношении.

Для того, чтобы получить из квадрата $OACB$ прямоугольник $OPRQ$, необходимо прежде всего удлинять сторону OA до тех пор, пока она не станет равной OP, и тем самым увеличить весь квадрат до размеров прямоугольника OD, площадь которого увеличивается при этом в отношении OA к OP. Далее затем мы должны в полученной фигуре удлинять сторону OB, пока не сделаем ее равной OQ. Благодаря этому, фигура OD достигнет Q размеров OR, и площадь ее возрастет в отношении OB к OQ. Равным образом, мы можем, если нам угодно, сначала растянуть OB до величины OQ, благодаря чему квадрат OC станет равным OE, а затем растянуть OA до размеров OP, вследствие чего OE станет равным RO. Таким



Черт. 34.

образом вся операция превращения квадрата OC в прямоугольник OR выполняется при посредстве двух растяжений, или, как мы условились называть их, двух „умножений“: а именно, мы должны были умножить квадрат на отношение OP к OA, а затем на отношение OQ к OB; результат показывает нам, как мы можем в том убедиться, что порядок, в котором эти два процесса следуют, является несущественным.

Действительно, обозначим отношение OP к OA буквой a и отношение OB к OQ буквой b. Тогда отношение прямоугольника OD к квадрату OC равно также a; другими словами, a раз взятое OC равно OD. Отношение OR к OD равно b; поэтому b раз OD дает OR, то-есть a раз повторенное OC, умноженное на b, равняется OR, или, как это мы пишем, ba раз OC составляет OR[1]).

Точно так же b раз OC равняется OE, и b раз повторенное OC, умноженное на a, составляет a раз OE, которое, в свою очередь, равно OR.

Следовательно, мы нашли, что OC, умноженное на ba, дает тот же результат, что OC, умноженное на ab, что можно записать в форме

$$ba = ab;$$

это показывает, что умножение сначала на отношение a, а потом на отношение b приводит к тому же результату, что и умножение сначала на отношение b, а потом на отношение a.

Этому предложению, согласно которому при умножении на отношения мы можем брать их в каком угодно порядке, не оказывая тем никакого влияния на результат, можно придать другую форму.

Предположим, что у нас имеется четыре величины a, b, c, d. Я могу превратить a в d следующими двумя последовательно выполненными процессами. Во-первых, путем умножения a на отношение b к a, что превратит его в b, а затем умножением на отношение d к b. Но я мог бы произвести над a то же действие, умножая его сперва на отношение c к a, а затем—на отношение d к c. Отношение b к a сокращенно мы привыкли записывать одним из следующих четырех способов:

$$b : a,\ \frac{b}{a},\ b \div a,\ b/a.$$

Таким образом только что отмеченный нами факт может быть записан следующим образом:

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \cdot \frac{d}{c}.$$

[1]) В силу просто условия, создавшегося вследствие нашего обыкновения читать слева направо, мы читаем символы умножения или какой-нибудь другой операции *справа налево*. Таким образом, повторение ab раз величины x означает, что повторенное b раз x умножено на a; другими словами, мы умножаем x сначала на b, потом на a. Мы совершаем сначала ту операцию, символ которой стоит на последнем месте.

Допустим теперь, что a, b, c, d — четыре пропорциональных величины,— другими словами, что отношение $\frac{b}{a}$ и $\frac{d}{c}$ равны друг другу. Отсюда следует, что отношения $\frac{c}{a}$ и $\frac{d}{b}$ также равны друг другу.

Это предложение, иначе говоря, может быть представлено в такой форме: если a, b, c, d — величины, составляющие пропорцию, то a, c, b, d будут также образовывать пропорцию при условии, конечно, что это последнее положение имеет какой-либо смысл. Мы говорим это потому, что совершенно возможно, что оно не будет иметь вовсе никакого смысла. Предположим, например, что a и b две длины, а c и d два промежутка времени. Мы понимаем в этом случае смысл отношений b к a, и d к c, и эти отношения превосходно могут равняться друг другу, но таких отношений, как отношение c к a или d к b нет, так как сравниваемые величины не однородны [1]). Если же четыре величины *одного и того же рода* пропорциональны, то они образуют пропорцию и в том случае, когда они взяты *с переменой места*, или когда, другими словами, две средние величины поставлены одна на место другой.

§ 7. О дробях.

Мы видели в § 3 на странице 84, что отношение может быть выражено дробью. Пусть a будет представлено дробью $\frac{p}{q}$, а b—дробью $\frac{r}{s}$, где p, q, r, s числа. Тогда результат, полученный у нас на странице 84 может быть записан следующим образом:

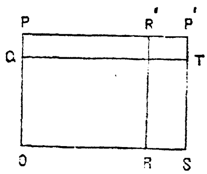
$$\frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{r}{s} \times \frac{p}{q}.$$

Исследуем несколько более подробно внутренний смысл каждой части этого равенства. Предположим, что мы должны были бы взять прямоугольник $OQTS$, в одной стороне которого OQ содержится q единиц длины, в другой OS таких единиц s. В таком случае мы могли бы получить этот прямоугольник из квадратной единицы, производя над ней две операции растяжения q и s. Площадь его содержала бы после этого qs квадратных единиц. Приложим теперь этому прямоугольнику два растяжения, обозначенные $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$. Если мы увеличиваем прямоугольник по направлению стороны OQ в отношении $\frac{p}{q}$, мы разделяем при этом OQ на q равных частей и затем для получения

---

[1]) Клиффорд здесь еще не вводит расширенного толкования понятия об отношении *(прим. переводчика)*.

OP берем одну такую часть p раз. Но каждая из таких частей равна единице, а потому отсюда следует, что в OP содержится p единиц. Мы обращаем таким образом наш прямоугольник OT в прямоугольник OP', одна сторона которого OP содержит p единиц, а другая (OS) — s единиц. Приложим теперь к этому прямоугольнику растяжение $\frac{r}{s}$, параллельное стороне OS (на нашем чертеже $\frac{r}{s}$ обозначает *сжатие*). Мы должны разделить OS на s равных частей и взять r таких частей, или мы должны отмерить вдоль по OS длину OR, равную r единицам. Таким образом это второе растяжение обращает прямоугольник OP' в прямоугольник OR', в одной стороне которого OP содержится p единиц, а в другой (OR)—r единиц длины; другими словами, обращает его в прямоугольник, равный pr квадратным единицам. Отсюда следует, что два растяжения $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$, последовательно приложенные к прямоугольнику OT, обращают его в прямоугольник OR'. Этот процесс символически может быть записан следующим образом: $\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}$. прямоугольник OT = прямоугольнику $OR'=pr$ прямоугольникам-единицам.



Черт. 35.

Прямоугольник-единица может быть, очевидно, получен из прямоугольника OT путем сжатия последнего сначала в отношении $\frac{1}{q}$ по направлению OQ, а затем в отношении $\frac{1}{s}$ по направлению OS. Вместо этого, можно просто сказать, что OT содержит qs прямоугольников-единиц. Поэтому операция $\frac{p}{s}\times\frac{r}{s}$, будучи приложена к прямоугольнику-единице, должна дать $\frac{1}{qs}$ того результата, который получается, когда та же операция приложена к прямоугольнику OT.

Итак:

$\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}$. прямоугольник-единица $=\frac{1}{qs}$. pr прямоугольников-единиц или, согласно нашему обозначению, $=\frac{ps}{qr}$. прямоугольников-единиц. Исходя из этого, мы можем сказать, что действие $\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}$ на единицу равносильно операции, обозначаемой $\frac{pr}{qs}$, или еще иначе умножению единицы на pr и делению ее на qs. Эта равносильность обозначается термином *умножение дробей*.

Особый случай умножения дробей получается при s, равном r; тогда:

$$\frac{p}{q}\times\frac{r}{r}=\frac{rr}{qr}.$$

Но операция $\frac{r}{r}$ указывает, что мы должны разделить единицу на r равных частей и взять r таких частей; другими словами, мы производим над единицей операцию, *не оставляющую следа*. Символ этой операции может быть опущен, и мы читаем следующее:

$$\frac{p}{q}=\frac{pr}{qr}.$$

Результат этот может быть выражен словами так: значение дроби остается без перемены, если умножить ее числитель и знаменатель на равные величины. Пользуясь этим последним результатом, мы без труда можем истолковать операцию

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}.$$

Действительно, согласно предыдущему параграфу,

$$\frac{p}{q}=\frac{ps}{qs}, \text{ а } \frac{r}{s}=\frac{qr}{qs},$$

отсюда

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps}{qs}+\frac{qr}{qs}.$$

Таким образом, если произвести над единицей операцию $\frac{p}{q}$ и затем приложить к тому, что получится, результат операции $\frac{r}{s}$, то в итоге будут иметь то же, что получается, когда единицу разделяют на qs частей, берут ps таких частей и к ним прибавляют еще qr таких частей. Но это равносильно тому, как, если бы мы взяли $ps+qr$ таких частей. Таким образом мы можем написать:

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps+qr}{qs}.$$

Результат этот известен под именем ***сложения дробей***. Читателю не представит никаких затруднений истолковать сложение графически посредством ряда последовательных растяжений, сжатий прямоугольника-единицы.

Мы именуем *делением* операцию, при помощи которой мы погашаем результат, достигнутый умножением.

Поэтому, когда мы спрашиваем о смысле *деления* на дробь $\frac{p}{q}$, мы ставим тем самым следующий вопрос: какова та операция, которая, следуя за операцией $\frac{p}{q}$, совершенно погашает ее действие?

Мы имеем:

$$\frac{r}{s}\times\frac{p}{q}=\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}=\frac{pr}{qs}.$$

Предположим, что у нас

$$r = q\ ;\ s = p.$$

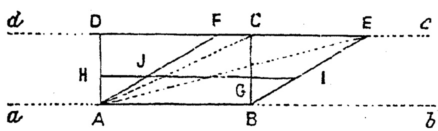
Тогда

$$\frac{q}{p} \times \frac{p}{q} = \frac{pq}{qp};$$

но умножить единицу на $\frac{p}{q}$, а затем на $\frac{q}{p}$, значит, выполнить операцию деления на qp равных частей и затем взять pq таких частей, иначе оставить единицу без изменения. Таким образом, растяжение $\frac{q}{p}$ совершенно погашает растяжение $\frac{p}{q}$; действительно, это умножение, которое производит действие, как раз обратное предшествовавшему растяжению. Значит, умножение на $\frac{q}{p}$ должно быть операцией, равносильной *делению* на $\frac{p}{q}$. Иначе говоря, разделить на $\frac{p}{q}$ значит то же самое, что умножить на $\frac{q}{p}$. Этот результат называется *делением на дробь*.

§ 8. О площадях; сдвиг.

До сих пор нам приходилось иметь дело с увеличением и уменьшением сторон прямоугольника. Операции эти изменяют его площадь, но оставляют в то же время без изменения его прямоугольную форму. Мы опишем теперь операцию, которая изменяет углы прямоугольника, но оставляет неизменной его площадь.



Черт. 36.

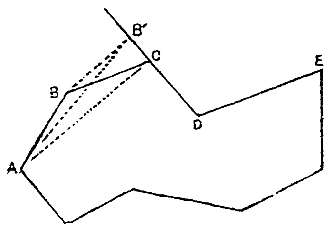
Пусть $ABCD$ прямоугольник, а $ABEF$ параллелограмм, (т.-е. фигура о четырех сторонах, у которой противоположные стороны равны); пусть одна сторона этого параллелограмма AB та же, что и у прямоугольника; противоположная сторона EF (равная AB, а следовательно, и CD) находится где-либо на той же прямой, что и CD. Так как CD равно EF, точки E и F соответственно отстоят на равных расстояниях от точек CD; отсюда следует, что треугольники BCE и ADF равны. Если треугольник BCE мы отрежем от параллелограмма по линии BC и поместим в положение ADF, то тем самым мы превратим параллелограмм в прямоугольник, не изменяя его площади. Таким образом, площадь параллелограмма равна площади прямоугольника. Но площадь прямоугольника получается как произведение числовой величины, представляющей длину AD, на число, представляющее длину AB. AB называется *основанием* параллелограмма; AD, расстояние между основанием и противоположной стороной EF, отсчитываемой по перпендикуляру, называется *высотой* параллелограмма. Площадь параллелограмма, согласно этому, говоря кратко, равна „произведению основания на высоту“. Предположим, что AB и CD твердые стержни, могущие скользить по параллельным прямым cd и ab. Вообразим, что между ними натянута прямоугольная эластичная пленка $ABCD$; тогда при движении стержней по ab и cd пленка будет менять свою форму. Но она будет оставаться все время параллелограммом с постоянными высотой и основанием, и потому площадь ее не претерпит никаким изменений. Пусть стержень AB неподвижно укреплен на своем месте, а стержень CD переведен вдоль по оси cd в положение EF. Тогда любая прямая GH, равная и параллельная AB, взятая на пленке, переместится параллельно самой себе в положение IJ, не изменив своей длины. Расстояние, на которое переместилось C, равно CE; расстояние, на которое переместилось G, равно GJ. Так как сторона треугольников CBE и GBI параллельны, то треугольники эти подобны, а потому отношение CE к GI равно отношению BC к BG. Другими словами, при обращении прямоугольника $ABCD$ в параллелограмм $ABEF$, все прямые, параллельные AB, не претерпевают никаких изменений длины и перемещаются параллельно самим себе на расстояния, пропорциональные расстояниям их от AB. Такое преобразование фигуры называется сдвигом. Мы можем понимать это преобразование либо в том смысле, что наш прямоугольник сдвигом был преобразован в параллелограм, или, что последний превращен был в прямоугольник. Таким образом, площадь параллелограмма равна площади прямоугольника, в который он может быть преобразован посредством сдвига.

Тот же процесс, посредством которого параллелограмм $ABEF$ обращается в прямоугольник $ABCD$, обращает треугольник ABE, половину этого параллелограмма, в треугольник ABC, в половину прямоугольника.

Таким образом, мы можем превратить каждый треугольник посредством сдвига в прямоугольный треугольник, не изменяя его площади. Отсюда следует, что площадь всякого треугольника равна половине площади прямоугольника, имеющего то же основание, что треугольник, и высоту, равную перпендикуляру, опущенному на основание из вершины угла противоположного. Этот перпендикуляр называется также высотой треугольника; поэтому мы можем сказать коротко: *площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.*

Выполняя ряд последовательных сдвигов, мы можем превратить любую фигуру, ограниченную прямыми, в треугольник, имеющий одинаковую с ней площадь, и таким образом определить площадь, занимаемую фигурой при посредстве заключительного сдвига этого треугольника в прямоугольный треугольник. Положим, например, что

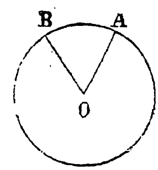
ABCDE представляет часть границы фигуры (черт. 37). Соединяем *A* с *C*; затем производим сдвиг треугольника, благодаря которому его вершина *B* перейдет в *B'* на продолжении стороны *CD*. Площадь треугольника *AB'C* равна площади *ABC*. В силу этого, мы можем принять за контур нашей фигуры *AB'DE*, вместо *ABCDE*, то-есть, иначе говоря, можно уменьшить число сторон нашей фигуры на одну. Поэтому посредством ряда последовательных сдвигов можно превратить любую фигуру, ограниченную прямыми, в треугольник и таким образом найти ее площадь.



Черт. 37.

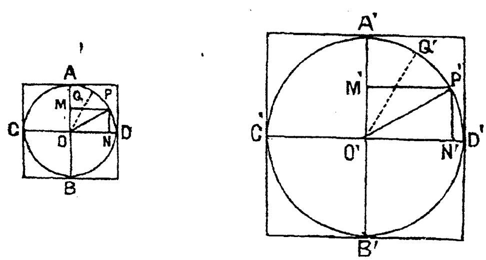
§ 9. О кругах и их площадях.

Одной из первых площадей, ограниченных кривыми линиями, встречающихся при изучении таких площадей, является площадь *сектора* круга, или часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой окружности, заключенной между их концами (черт. 38). Прежде чем мы получим возможность рассмотреть вопрос о площади этого сектора, нам придется вывести некоторые главные свойства полного круга. Возьмем круг, радиус которого равен единице, и предположим, что в концах двух взаимно-перпендикулярных его диаметров проведены прямые под прямыми к ним углами. Тогда круг окажется как бы вписанным в квадрат (черт. 39). Каждая сторона этого квадрата равна 2, а площадь его равна 4.



Черт. 38.

Предположим теперь, что фигура, образованная кругом и квадратом, подвергается, во-первых, растяжению такого рода, что все прямые, параллельные диаметру *AB*, удлиняются в отношении *a*:*1*, а затем другому растяжению, при котором все прямые, параллельные *CD*, в свою очередь, удлиняются в отношении *a*:*1*. Очевидно, что мы увеличили квадрат, представленный на первом чертеже, превратив его во второй квадрат, стороны которого теперь равны $2a$.



Черт. 39.

Остается показать, что мы увеличили первый круг до размеров второго круга. Пусть *OP* какой-нибудь радиус, а *PM* и *PN* перпендикуляры, опущенные на диаметры AB и CD. В результате первого растяжения равные длины OM и NP оказываются увеличенными до размеров равных между собой $O'M'$ и $N'P'$, при чем $\frac{OM}{O'M'} = \frac{NP}{N'P'} = \frac{1}{a}$. Равным образом, вследствие второго растяжения MP и ON, которые оставались во время первого растяжения неизменными, обратились теперь в $M'P'$ и $O'N'$, при чем $\frac{ON}{O'N'} = \frac{MP}{M'P'} = \frac{1}{a}$.

Во время этого второго увеличения $O'M'$ и $N'P'$ остаются без изменений. Таким образом, в конечном результате двух растяжений треугольник OPN оказывается превращенным в треугольник $O'P'N'$. Оба эти треугольника имеют одну и ту же форму, согласно тому, что сказано было нами на стр. 88, так как углы при N и N' равны, как прямые, и, сверх того, мы видели, что

$$\frac{NP}{N'P'} = \frac{1}{a} = \frac{OM}{O'M'}.$$

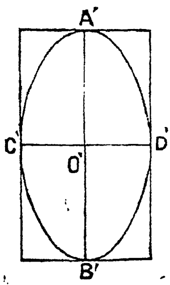
Отсюда следует, что и отношение третьей стороны OP к соответственной стороне $O'P'$ должно быть также $1:a$; но так как OP равно единице длины, $O'P'$ должно быть равно постоянной величине a. Далее, вследствие равенства углов PON и $P'O'N'$, $O'P'$ параллельно OP. Итак, круг, радиус которого был равен единице, обращен в другой радиуса a. В самом деле, два равных растяжения, сообщенные нами первой фигуре по направлениям, образующим друг с другом прямой угол, произвели над ним совершенно такую же операцию, какую мы наблюдали бы, если бы поместили этот чертеж перед увеличительным стеклом, которое увеличивало бы его равномерно, и притом в такой степени, что каждая линия была бы увеличена в отношении a к 1.

Отсюда следует, что отношение окружности второго круга к окружности первого круга должно быть равно a к 1, или иначе окружности кругов относятся, как их радиусы. Равным образом, если дуга PQ обращена в дугу $P'Q'$, то есть, если $O'P'$ и $O'Q'$ параллельны OP и OQ, то отношение дуги $P'Q'$ к дуге PQ равно отношению радиусов этих кругов. Дуги PQ и $P'Q'$ равны другим дугам, стягивающим, как и оне, те же центральные углы в соответственных кругах, а потому мы можем высказать следующее общее положение: отношение *дуг двух кругов, стягивающих в соответственных кругах равные центральные углы, равно отношению соответственных радиусов.*

Так как вторая фигура представляет собой равномерно увеличенное изображение первой фигуры, каждый элемент площади первой фигуры оказывается равномерно увеличенным во второй фигуре. Квадрат на первом чертеже имеет площадь, равную четырем квадратным единицам, площадь же второго квадрата содержит $4a^2$ таких единиц. Таким образом, каждый элемент площади первой фигуры во второй фигуре оказывается увеличенным в отношении a^2 к 1. Поэтому отношение площади круга на первом чертеже к площади второго круга равно отношению 1 к a^2, иначе говоря, *площади кругов относятся, как квадраты их радиусов.*

Площадь круга, радиус которого равен единице, согласно обычному написанию равна величине π, поэтому площадь круга радиуса a будет представлена величиной πa^2.

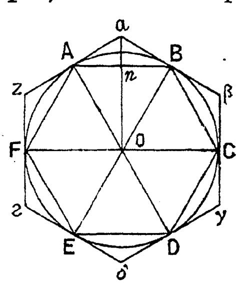
Если после удлинения AB до размеров $A'B'$ в отношении a к 1, мы растянем или сожмем CD до величины $C'D'$ в отношении b к 1, где b некоторая величина, отличная от a, наш квадрат станет прямоугольником, стороны которого будут соответственно равны $2a$ и $2b$. Можно показать, что при этом мы изменили вид нашего круга, придав ему форму тени круга, которую мы называли эллипсом.



Черт. 40.

Далее затем элементы площади теперь увеличены в отношении произведения величин a и b к единице. Иначе говоря, площадь эллипса так относится к площади круга, радиус которого равен единице, как ab к 1. Отсюда следует, что площадь эллипса выражается в виде πab, где a и b соответственно наибольший и наименьший его радиусы.

Теперь мы попытаемся связать величину площади круга, радиус которого равен единице, обозначенную нами через π, с числом линейных единиц, содержащимся в окружности. Возьмем некоторое число точек, равномерно распределенных по окружности круга $ABCDE$. Соединим их последовательно друг с другом, а также с центром O и проведем в $ABCDEF$ к этим радиусам перпендикуляры (иначе говоря *касательные*). Тем самым мы построили две совершенно симметричные фигуры, одна из которых, как говорят, *вписана* в круг, а другая *описана* около круга. Площади этих двух фигур отличаются друг от друга на сумму таких треугольников, как $A\alpha B$, при чем площадь круга, очевидно, больше площади фигуры вписанной и меньше фигуры описанной. Таким образом, площадь круга отличается от площади фигуры вписанной на величину, несколько меньшую суммы всех таких малых треугольников, как $A\alpha B$, $B\beta C$ и т. д. В силу симметричности, все эти маленькие треугольники друг другу равны, и площади их равны половине произведения их высот (an) на соответственное основание, то-есть такую величину, как AB. Отсюда сумма их площадей равна половине произведения an на сумму сторон вписанной фигуры. Но сумма сторон вписанной фигуры никогда не может быть больше окружности круга. Если, стало-быть, мы возьмем



Черт. 41.

большое число точек, равномерно распределенных по окружности круга, то A и B могут быть взяты как угодно близко друг от друга, и чем ближе будем мы придвигать A к B, тем меньше будет становиться an. Взяв достаточное число точек, мы можем сделать сумму треугольников $A\alpha B$, $B\beta C$ и т. д. как угодно малой, иначе говоря, разница между площадями фигур вписанной и описанной или между ними и площадью круга (она заключена между этими двумя площадями) может быть сделана меньше всякой заданной величины. Мы можем сказать, что, взяв бесконечно большое число точек, в пределе можем сделать эти площади равными. Но площадь вписанной фигуры равна сумме таких треугольников, как AOB, а площадь треугольника AOB равна произведению его высоты On на основание AB или, обозначая „периметр“, то-есть сумму всех сторон AB, BC и т. д., через величину p, получим, что площадь вписанной фигуры равна $\frac{1}{2}p \times On$. Равным образом, если p' — сумма сторон $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ и т. д. фигуры описанной, то площадь последней равна $\frac{1}{2}p' \times OB$.

Так как треугольники OaB, OBn имеют одну и ту же форму (оба они—треугольники прямоугольные и, сверх того, имеют по равному углу в O), то отношение Bn к αB (или отношение в два раза больших, нежели оне, сторон AB к $\alpha\beta$) то же, что и отношение On к OB. Но p относится к p', очевидно, так же, как AB $\alpha\beta$; отсюда следует, что отношение p к p' равно отношению On к OB. Взяв достаточное число точек, мы можем сделать On по величине как угодно близким к OB. В силу этого, мы можем как угодно сблизить величины p и p' и потому приблизить их к величине окружности круга, заключенной между ними [1]), насколько того пожелаем. Таким образом, периметр p в пределе равен окружности круга, а On—ее радиусу; мы можем установить, что площади вписанных и описанных фигур, которые, по мере того, как мы увеличиваем число сторон, приближаются все больше и больше к площади круга, в конце-концов, становятся равными друг другу, а в то же время равными половине произведения окружности круга на его радиус. Произведение это должно поэтому представлять площадь круга. Отсюда мы имеем следующее равенство: площадь круга радиуса a равняется половине его окружности $\times\, a$. Но она равна также πa^2; отсюда следует, что окружность круга равняется $\pi .\, 2a$. Мы можем выразить этот результат двумя различными способами, а именно: мы можем сказать, что

1) отношение окружности круга к диаметру $(2a)$ есть постоянное число π;

---

[1]) В случае круга читатель придет к признанию этого положения путем интуиции.

2) число единиц длины (2π) в окружности круга радиуса единицы в два раза больше числа квадратных единиц, заключающихся в площади (π), ограничиваемой этой окружностью.

Значение π, отношение окружности круга к его диаметру, как было найдено, представляет собой величину, которая, подобно отношению диагонали квадрата к его стороне (см. стр. 85), не может быть выражена точно посредством чисел; его приближенное значение: 3, 14159.

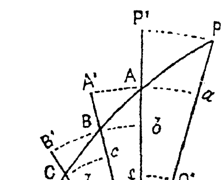
Теперь мы не встретим никаких затруднений при определении площади сектора круга. Действительно, при удвоении дуги сектора, мы удваиваем и его площадь, при утроении ея мы площадь утраиваем; короче говоря, если мы берем, вместо данной дуги какое-либо кратное дуги сектора, мы получаем во столько же раз большую площадь сектора. Отсюда, согласно § 5, следует, что отношение двух секторов равно отношению их дуг, или что отношение сектора ко всему кругу равно отношению его дуги ко всей окружности. Если мы обозначим через S площадь сектора круга, дуга которого содержит s единиц длины, а радиус a единиц, то это отношение мы можем записать символически следующим образом:

$$\frac{S}{\pi a^2} = \frac{s}{2\pi a}.$$

Отсюда выводим, что $S = \frac{1}{2} s \times a$, или *что площадь сектора равна половине произведения длины его дуги на радиус.*

§ 10. О площади секторов криволинейных фигур.

Знание площади кругового сектора позволяет нам находить с любой степенью точности площадь сектора, дугой которого служит какая угодно кривая. Пусть дуга PQ разделена на несколько меньших дуг PA, AB, BC, CD, DQ. Предположим, что PA стягивает самый большой из углов, имеющих вершину в точке O. Далее затем возьмем для рассмотрения только тот случай, когда прямая OP, при переходе P по дуге PQ от точки P до точки Q, непрерывно уменьшается.



Черт. 42.

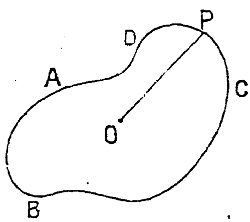
Если бы дело обстояло иначе, сектор QOP всегда можно было бы расколоть на меньшие секторы, по отношению к которым было бы справедливо утверждение, что прямая, соединяющая точку O с точками дуги, при переходе от одного конца ее к другому, непрерывно уменьшается. Тогда к определению площади каждого из этих секторов приложимо следующее исследование. Описываем из O, как центра, круг радиуса OP, который пересекает продолжение OA в точке P'. Принимая ту же точку за центр, описываем ряд таких кругов: круг радиуса OA, пересекающий OB в A' и OP в a; круг радиуса OB, пересекающий OA в b и OC в B'; круг радиуса OC, пересекающий OB в c и OD в C', радиуса OD, пересекающий OC в d и OQ в D', и, наконец, круг радиуса OQ, пересекающий OD в e, OA в S и OP в Q'. Очевидно, что площадь сектора заключается между площадями фигуры, ограниченной прямыми OP и OD' и ломаной $PP'AA'BB'CC'DD'$ и фигуры, ограниченной прямыми Oa, OQ и ломаной $aAbBcCdDeQ$. Отсюда следует, что площадь сектора отличается от каждой из этих двух площадей на величину, меньшую разности между ними или меньшую суммы площадей $P'a$, $A'b$, $B'c$, $C'd$, $D'e$. Так как угол POP' больше каждого из углов других секторов, имеющих общую вершину в точке O, сумма всех только что перечисленных площадей должна быть меньше площади фигуры $PP'fQ'$. при чем площадь эту мы можем сделать как угодно малой, придав углу AOP достаточно малую величину. Достигнуть этого можно, взяв вместо AB, CD и т. д. другое достаточное число точек. Таким образом мы в состоянии построить ряд круговых секторов, сумма площадей которых отличается как угодно мало от площади сектора POQ. Другими словами, задачу о нахождении площади какой-либо фигуры, ограниченной кривой линией, мы свели на уже решенную задачу нахождения площади кругового сектора. Трудности, которые могут представиться теперь, относятся целиком к области сложения очень большого числа величин, так как для того, чтобы приблизиться с достаточной точностью к размерам площади POQ, может оказаться необходимым взять очень большое число точек, как A, B, C, D и т. д.

§ 11. Расширение понятия о площади.

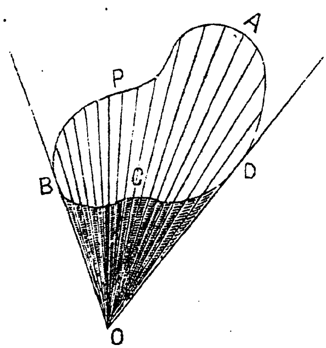
Пусть $ABCD$ замкнутая кривая, или петля, пусть O, точка внутри ее. Если точка P движется по контуру петли, говорят, что прямая OP описывает площадь петли $ABCD$. Говоря это, подразумевают, что последовательные положения прямой OP, взятые попарно, вместе с заключенными между этими положениями элементами дуги, образуют ряд элементарных секторов, сумма площадей которых при достаточно близких друг к другу положениях прямой OP может как угодно мало отличаться от площади, ограниченной петлей.

Предположим теперь, что точка O взята *вне* петли $ABCD$, и попробуем найти площадь, описываемую прямой OP, соединяющей точку O с точкой P, при движении этой точки по петле вокруг нее. Пусть OB и OD крайние положения прямой OP, слева и справа, из числа тех, какие она занимает при движении P по контуру петли $ABCD$. В то время, как P движется по части петли, обозначенной ABD, OP перемещается справа налево в сторону, *обратную движению часовой стрелки*, и описывает площадь, ограниченную дугой DAB и прямыми OD и OB. Когда же P движется по части петли BCD, OP перемещается слева направо в сторону *движения часовой стрелки* и описывает площадь, заштрихованную на нашем чертеже двойным штрихом, то-есть площадь, ограниченную дугой BCD и прямыми OB и OD. Разность этих двух площадей и будет площадью петли $ABCD$. Если последнюю площадь рассматривать как отрицательную, то прямая OP, при движении точки P по контуру петли, как и прежде, описывает площадь петли $ABCD$.

Характерным отличием в способах описывания площадей $ODABO$ и $OBCDO$ является то обстоятельство, что в первом случае OP вращается вокруг O в сторону, *обратную движению часовой стрелки*, в последнем же — в *сторону движения часовой стрелки*. Если мы условимся считать положительными площади, описываемые прямой OP при перемещении ее в сторону, обратную движению часовой стрелки, и отрицательными — площади, описываемые той же прямой при перемещении ее в направлении обратном, то независимо от того, находится ли точка O внутри или вне петли, прямая OP, разумеется, при условии, что точка P совершит полное обращение по контуру, описывает площадь петли.



Черт. 43.



Черт. 44.

Но следует отметить, что точка P, описывая петлю, может перемещаться при этом двумя различными способами: она может двигаться, подобно часовой стрелке, в порядке точек $ADCB$, или в направлении, обратном движению часовой стрелки, в порядке точек $ABCD$. В последнем случае большая площадь $ODABO$ есть площадь положительная, в первом случае мы имеем площадь отрицательную. Отсюда мы приходим к представлению, что *площадь может иметь знак*, а именно: мы будем считать площадь отрицательной или положительной, в зависимости от того, будет ли точка, описывающая ее контур, двигаться при этом в *направлении движения часовой стрелки* или в направлении обратном.

Это расширенное представление о площади, как о величине, имеющей не только известные размеры, но и знак, представляет положение глубокой важности в применении не только ко многим отраслям точных наук, но и в многочисленных случаях практических приложений [1].

Пусть в точке O (такой точкой, как мы видели, может быть любая точка той плоскости, в которой находится петля) возставлен перпендикуляр ON и пусть в длине ON содержится столько единиц длины, сколько в площади $ABCD$ заключается единиц квадратных. Тогда ON будет выражать своей величиной размеры площади петли, но тот же перпендикуляр может представить площадь и со стороны ее знака. Для этого достаточно условиться, что мы будем отмеривать ON от O всегда в таком направлении, чтобы лицо, стоящее ногами в точке O, видело перемещение точки P всегда совершающимся в сторону, обратную движению часовой стрелки. Таким образом, для положительной площади N будет всегда над плоскостью, для площади отрицательной—она будет находиться по другую сторону плоскости, то-есть под ней. Мы теперь имеем возможность выразить любое число площадей отрезками прямых линий, отложенных по перпендикулярам к соответственным плоскостям. Сумма какого-либо числа площадей, расположенных в одной и той же плоскости, получится таким образом путем алгебраического сложения всех прямых, представляющих эти площади.

Если не все площади лежат в одной и той же плоскости, то представляющие их прямые не все будут друг другу параллельны. В этом последнем случае существуют следующие два способа сложения площадей. Так, иногда требуется знать только размеры суммы всех площадей, как это бывает, например, в том случае, когда мы желаем найти стоимость окраски или позолоты какого-либо многогранного тела. Тут мы прямо складываем все прямые, представляющие размеры площадей, не обращая внимания на их знак.

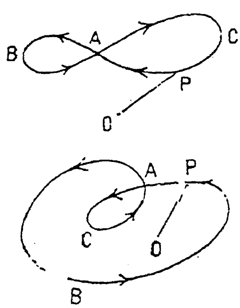
Во многих других случаях мы, напротив, желаем опредилить величину, находящуюся в таком соотношении с сторонами тела, что найти ее возможно лишь в том случае, когда мы будем рассматривать прямые, представляющие эти площади, как величины, *имеющие направление*. Такого рода потребность возникает, например, при рассмотрении теней, отбрасываемых телами, освещенными солнцем, при рассмотрении давления газа на стенки сосуда и т. д. Метод сложения направленных величин будет подробно рассмотрен в следующей главе. Понятием о площадях, как о величинах, имеющих направление, мы обязаны *Hayward*'у.

---

[1] Например, при вычислении стоимости нивелирования и сооружения насыпей или в индикаторных диаграммах. Впервые представление это введено Мёбнусом.

§ 12. О площади замкнутого сложного контура со многими петлями.

До сих пор мы предполагали, что площади, о которых мы говорили, ограничены простым контуром—петлей. Тем не менее легко определить также площадь совокупности петель. Рассмотрим, например, на черт. 45 фигуру восьмерки, у которой имеется две петли: если мы станем непрерывно перемещаться по контуру восьмерки в направлении, указываемом стрелками, то одна из этих петель будет имет площадь положительную, другая—площадь отрицательную, и потому вся площадь будет равна разности между ними, а в частном случае, если оне будут равны друг другу,—нулю. Когда замкнутая кривая пересекает самое себя, как это имеет место в фигуре восьмерки, она называется *вязью*, а точки, в которой она пересекает самое себя, носит название ее *узлов*. Таким образом, фигура восьмерки представляет собой такой сложный контур или вязь с одним узлом. При списывании площади замкнутой кривой при помощи прямой, проведенной из некоторой неподвижной точки к точке, движущейся по кривой, величина площади может изменяться в зависимости от направления и пути, следуя которым, по нашему предположению, была описана кривая. Если же мы предполагаем, что кривую вычерчивает движущаяся точка, то площадь ее для такого частного случая образования контура представляется совершенно определенной.

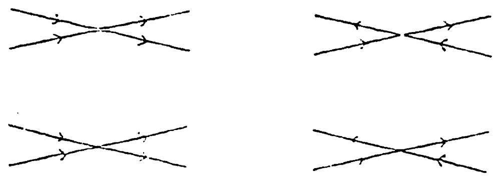


Черт. 45.

Покажем теперь, каким образом наиболее сложную вязь можно развязать в ряд простых петель и как определить всю площад такого сложного контура при помощи площадей простых петель. Мы предполагаем, что направление, которое следует приписать тому или другому контуру, будет направлением, обозначенным у нас стрелками. Рассмотрим какую-либо из фигур, помещенных рядом. Движущаяся прямая OP опишет точно такую же площадь, какую мы имеем на чертеже, и в том случае, если предположим, что ее пути не пересекаются в узле A, но что она сначала описывает петлю AC, а потом петлю AB, следуя по контурам обеих в направлении, указанном стрелками.

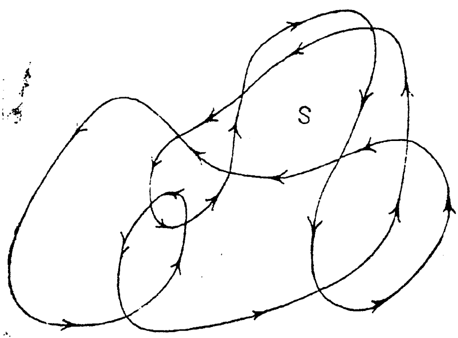
Благодаря этому, мы в состоянии во всех случаях превратить линию, пересекающую себя самое в узле, в совокупность двух линий, при чем каждая из них ограничивает отдельную петлю и соприкасается с другой в точке, которая перед тем была узлом. Читатель может представить себе это развязывание узлов путем оставления промежутков в тех местах, где границы петель соприкасаются в действительности. На помещенном выше чертеже (черт. 46) показано, как два угла развязаны именно таким способом.

Теперь для читателя не составит труда развязать на простые петли самую сложную сеть. Положительный или отрицательный смысл площадей этих петель в достаточной мере указывается стрелками у их контуров. Приведем теперь в заключение еще пример (черт. 47 и 48).

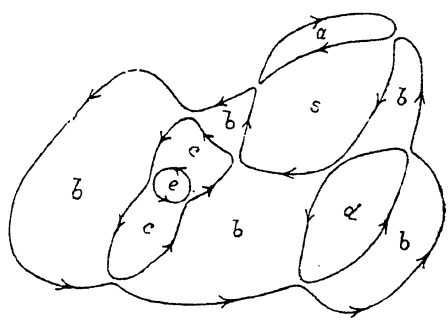


Черт. 46.

В данном случае вязь разрешается на отрицательную петлю a, большую положительную петлю b, внутри которой находятся две другие положительные петли c и d, при чем первая из них заключает



Черт. 47.

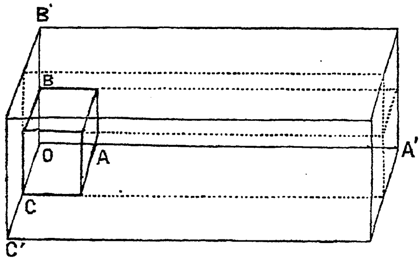


Черт. 48.

в себе пятую небольшую петлю e. Площадь всего сложного контура равна поэтому $a + b + c + d + e - a$. Место, обозначенное на первом чертеже (черт. 47) буквой s, как видно из второго чертежа, совершенно не входит в область площади, ограниченной нашим контуром.

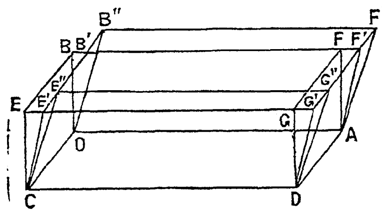
§ 13. Об об‘емах пространственных образов, или тел.

Рассмотрим прежде всего тело, ограниченное тремя парами параллельных плоскостей, взаимно пересекающихся под прямыми углами. Такое тело у специалистов носит название „прямоугольного параллелепипеда“, но, быть-может, его можно было бы назвать короче „прямым шестигранником“. Заметим, что если удлинить или укоротить в каком-нибудь отношении одну группу ребер такого прямого шестигранника, оставляя без изменения длину других ребер, непараллельных первым, то об‘ем многогранника увеличится или уменьшится точно в таком же отношении. Поэтому для того, чтобы получить какой-либо прямой шестигранник из куба, достаточно сообщить кубу три растяжения (или сжатия), соответственно параллельным трем группам параллельных ребер. Пусть OA, OB, OC три ребра куба, выходящие из общей вершины угла O; пусть ребро OA растянутой до размера OA', и пусть отношение OA' к OA представляется числом a. Если тело попрежнему должно оставаться прямым, все прямые, параллельные OA, будут вытянуты в том же отношении. Теперь наш куб превратился в шестигранник, в котором квадратными являются лишь сечения, перпендикулярные к ребру OA'. Растягиваем теперь OB до длины OB'; пусть это отношение OB' к OB будет представлено числом b, и пусть все прямые, параллельные OB, будут увеличены в том же отношении. Теперь у нас получился прямой шестигранник, в котором лишь одна группа ребер равна сторонам бывших у нас перед тем квадратов. Наконец, растянем OC до длины OC', так, чтобы OC и все прямые, параллельные OC, увеличились в отношении OC' к CO, которое назовем c.



Черт. 49.

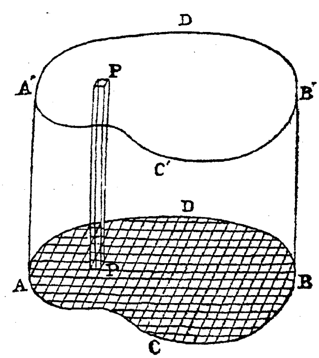
Таким образом, при помощи процесса, состоявшего из трех растяжений, мы превратили первоначально имевшийся у нас куб в прямой шестигранник. Если об'ем куба был равен единице, об'ем нашего шестигранника будет, очевидно, равен abc, и мы можем показать, что здесь, подобно тому, как мы видели в случае прямоугольника (см. стр. 93), имеют место равенства: $abc = cba = bac$ и т. д. или, что порядок, в котором перемножаются три отношения, не оказывает влияния на результат. Если мы назовем в нашем прямом шестиграннике грань $A'C'$ его *основанием*, а ребро OB'—его *высотой*, то ac представит собой основание этого шестигранника, а b—его высоту, или иначе: объем прямого шестигранника равен произведению его основания на высоту.



Черт. 50.

Допустим теперь, что прямой шестигранник $OADCEBFG$ (черт. 50) претерпевает сдвиг, или, что грань $BEFG$ передвигается в своей собственной плоскости таким образом, что стороны ее остаются параллельными своим первоначальным положениям, а точки B и E движутся соответственно по BF и EG. Если $B'E'G'F'$ есть новое положение грани $BEGF$, то, как легко видеть, два клинообразных тела $BEE'B'OC$ и $FGG'F'AD$ в точности равны друг другу: это следует из равенства их соответственных граней. Отсюда следует, что об‘ем тела, претерпевшего сдвиг, равен об‘ему прямого шестигранника.

Предположим, что, сверх того, грань $B'E'G'F'$, двигаясь, в свою очередь, в своей собственной плоскости, перемещается в положение $B''E''G''F''$, при чем B' и E' движутся соответственно вдоль по $B'E'$ и $F'G'$. Тогда косые клинообразные тела $B'B''F''F'AO$ и $E'E''G''FDC$ будут друг другу равны, и об‘ем шестигранника $B''E''G''F''ADCO$, полученного путем второго сдвига, будет равен об‘ему тела, полученного при помощи первого сдвига, а потому и об‘ему первоначально данного прямого шестигранника. Но при помощи двух сдвигов мы можем перенести грань $BEGF$ в любое положение $B''E''G''F''$ в ее плоскости, к котором стороны грани будут оставаться параллельными своим первоначальным положениям. Отсюда следует, что об‘ем шестигранника остается постоянно одним и тем же, если одна грань $OCDA$ неподвижна, противоположная же, $BEFG$ перемещается, оставаясь параллельной самой себе, каким бы то ни было способом в своей плоскости. Мы нашли, что объем шестигранника, образованного тремя парами взаимно параллельных плоскостей, равен произведению площади одной из его граней на измеренное по перпендикуляру к ней расстояние между ней и параллельной ей плоскостью. Это утверждение основывается на том, что такой шестигранник путем сдвигов может быть превращен в прямой шестигранник, а как мы видели, сдвиг не изменяет величины об‘ема.



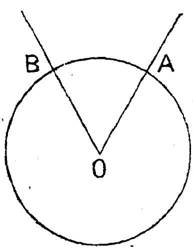
Черт. 51.

Пользуясь добытым таким путем знанием об‘ема многогранника, ограниченного тремя парами параллельных граней, или иначе об‘ема так называемого параллелипипеда, мы в состоянии найти об‘ем *косого цилиндра*. Прямой (черт. 51) цилиндр представляет собой тело, образованное площадью какой-нибудь криволинейной фигуры, перемещающейся параллельно самой себе таким образом, чтобы любая точка ее, скажем P, перемещалась вдоль по прямой PP' под прямым углом к площади. Об‘ем прямого цилиндра равен произведению его высоты PP' на производящую площадь. В самом деле, мы можем рассматривать этот об‘ем, как сумму известного числа элементарных прямых шестигранников, основания которых (P) могут быть взяты столь малыми, что, в конце-концов, они совершенно выполнят собою площадь $ACBD$, высоты же все равны PP'.

Косой цилиндр мы получаем из изображенного выше, куда-либо передвигая его грань $A'C'B'D$ параллельно самой себе в ее собственной плоскости. Но такое движение производит только сдвиг элементарных прямых шестигранников (таких, как PP'), не изменяя их об‘ема. Отсюда следует, что об‘ем косого цилиндра равен произведению его основания на отмеренное по отвесу расстояние между его основаниями.

§ 14. Об измерении углов.

До сих пор мы имели дело с величинами площадей и величинами об‘емов; в настоящее время мы должны обратиться к рассмотрению величин *углов*. В главе о пространстве (стр. 60) мы указали один способ измерения углов, но это был только относительный метод и он не дал нам возможности установить абсолютную единицу. Действительно, мы принимали за единицу угла любой раствор циркуля и определяли размеры другого угла посредством отношения его к этому углу. Но есть единица абсолютная, которая, так сказать, сама напрашивается при нашем измерении углов. Мы рассмотрим эту единицу теперь, так как мы будем ей часто пользоваться в нашей главе о „*Положении*“.



Черт. 52.

Пусть дан угол AOB, и пусть из точки O, как из центра, описан круг радиуса a, пересекающий стороны этого угла в точках A и B. Если бы мы удвоили угол AOB, то тем самым мы удвоили бы и дугу AB; если бы мы утроили угол, то тем самым утроили и дугу его. Короче говоря, когда мы берем какое-либо кратное угла, мы в то же время берем такое же кратное его дуги. Таким образом, мы можем установить, что центральные углы изменяются пропорционально соответствующим им дугам. Поэтому, если θ и θ' два угла, соответственно стягиваемые дугами s и s', то отношение θ к θ' равно отношению s к s'.

Предположим теперь, что θ' равно четырем прямым, тогда s' будет целой окружностью, или, согласно нашим предшествовавшим обозначениям, $2\pi a$.

Отсюда имеем:

$$\frac{\theta}{\text{четыре прямых угла.}} = \frac{s}{2\pi a}$$

Чрезвычайно удобно выбрать единицу угла так, чтобы она не зависела от окружности, на которой мы измеряем наши дуги. Такую не зависящую от размеров окружности единицу мы получим, взяв угол, для которого стягивающая его дуга равна радиусу, или, что то же, для которого $s = a$. В таком случае наша единица (так называемый *радиан*) равняется $\frac{1}{2\pi}$ четырех прямых углов $= \frac{1}{\pi}$ двух прямых углов = приблизительно 0,636 прямого угла.

Отсюда мы видим, что центральный угол, дуга которого равна радиусу, представляет собой постоянную дробь прямого угла.

Если этот угол принять за единицу, то из пропорции, устанавливающей равенство отношений θ к θ' и s к s', мы выводим, что отношение θ к единице угла равно отношению s к радиуса a,

$$\text{или } s = a\theta.$$

Таким образом, раз выше определенный угол принят за единицу меры, размер всякого другого угла будет равен отношению соответствующей ему дуги окружности, описанной из его вершины, как из центра, к радиусу. Но мы видели (см. стр. 101), что дуги различных окружностей, соответствующие равным центральным углам, относятся в радиусы этих окружностей. Отсюда следует, что только что указанный способ измерения угла *не зависит от радиуса круга, на котором мы основываем наше измерение.* Это первое свойство *измерения* углов *при помощи радиан.* И это-то свойство и придает такую большую ценность только что рассмотренному нами способу.

Таким образом *величина угла в радианах* равна отношению соответствующей ему дуги окружности, описанной из его вершины, как из центра, к ее радиусу. Отсюда следует, что величина четырех прямых углов в радианах представится отношением всей окружности к радиусу, то-есть $\frac{2\pi a}{a}$, что равно 2π. Два прямых угла в радианах равны π, прямой угол $\frac{\pi}{2}$, три прямых угла $\frac{3\pi}{2}$ и т. д.

§ 15. О степенях с дробными показателями.

Прежде чем оставить изучение величин, необходимо вернуться еще раз к вопросу о степенях, которого мы коснулись в главе о „Числе“ (стр. 23).

Там мы пользовались знаком a^n, понимая его как символ результата n · кратного умножения числа a на самого себя. Из этого определения мы легко можем вывести следующее тожество:

$$a^n \times a^p \times a^q \times a^r = a^{n+p+q+r}.$$

Действительно, левая часть показывает, что мы должны сначала умножить a само на себя n раз, затем умножить его на a^p, или на a, повторенное множителем p раз, и т. д. Таким образом левую часть мы можем написать в следующем виде:

$$\begin{array}{l} (a \times a \times a \times a \;.\;.\;.\; \text{всего } n \text{ множителей}) \\ \times (a \times a \times a \times a \;.\;.\;.\; \text{всего } p \text{ множителей}) \\ \times (a \times a \times a \times a \;.\;.\;.\; \text{всего } q \text{ множителей}) \\ \times (a \times a \times a \times a \;.\;.\;.\; \text{всего } r \text{ множителей}). \end{array}$$

Но, очевидно, произведение это равно ($a \times a \times a \times a \ldots$, где всего $n+p+q+r$ множителей), или равно $a^{p+n+q+r}$.

Если b такая величина. что $b^n = a$, то b называется корнем n-ой степени из a, что символически изображается так: $b = \sqrt[n]{a}$. Так, $8 = 2^3$; а потому 2 есть корень третьей степени или корень кубичный из 8. Другой пример: $243 = 3^5$; 3 называется корнем 5-ой степени из 243.

В заключительной части первой главы мы уже видели, что, расширяя значение наших обозначений, мы можем часто открыть очень многое. Посмотрим, нельзя ли придать более широкое толкование символу a^n. Спросим себя, теряет ли смысл этот символ, когда n есть дробь или отрицательное число? Очевидно, умножить величину на самое себя дробное число раз мы не можем, не можем мы взять его множителем и отрицательное число раз. Таким образом прежнее значение символа a^n, где n было целым положительным числом, теряет всякий смысл при попытке воспользоваться им в случае n дробного или отрицательного. Но действительно ли при этом лишен символ a^n смысла?

В случае, подобном нашему, мы становимся втупик перед результатами, следующими из нашего определения; попробуем поэтому дать нашему символу такое толкование, чтобы оно стояло в согласии с этими результатами.

Основное положение нашей теории целых положительных степеней выражается в форме:

$$a^{n+p+q+r+\cdots} = a^n \times a^p \times a^q \times a^r \times \ldots$$

Это равенство сохранит свою силу, сколько бы таких величин, как n, p, q, r, мы не взяли. Предположим, что мы желаем истолковать $a^{\frac{l}{m}}$, где $\frac{l}{m}$ дробь. Мы начинаем с предположения, что этот символ удовлетворяет написанному выше тожеству; чтобы прийти к пониманию его значения, мы предположим далее, что $n = p = q = r \ldots = \frac{l}{m}$ и что таких величин m мы находим, что $n + p + q + r + \ldots = m \times \frac{l}{m} = l$, и что $a^l = a^{\frac{l}{m}} \times a^{\frac{l}{m}} \times a^{\frac{l}{m}} \times a^{\frac{l}{m}} \times \ldots$ (всего m множителей) $= \left(a^{\frac{l}{m}}\right)^m$.

Таким образом $a^{\frac{l}{m}}$ представляет собой такую величину, которая, будучи умножена на самое себя m раз, дает в результате a^l. Но мы дали (стр. 114) следующее определение корня: корнем m-ой степени из a^l называется такая величина, которая будучи умножена на самое себя m раз, дает a^l. В силу этого мы в праве сказать, что $a^{\frac{l}{m}}$ равняется корню m-й степени из a^l. Или, как это пишется для краткости:

$$a^{\frac{l}{m}} = \sqrt[m]{a^l}$$

Итак, пользуясь основной теоремой степеней, мы нашли значение a^n в том случае, когда n дробное.

Мы можем из той же самой теоремы с одинаковой легкостью получить понятное толкование a^n и в том случае, когда n есть величина отрицательная.

Мы знаем, что $a^n \times a^p = a^{n+p}$. Для того, чтобы истолковать a^{-n}, примем $p = -n$, примем $p = -n$. Мы находим, что $a^n \times a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$ (стр. 34). Разделяем обе части на a^n, имеем:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n};$$

другими словами, a^{-n} есть величина, которая, будучи умножена на a^n, в произведении дает единицу. Первая величина называется *обратной* последней величине; мы можем, значит, сказать, что a^{-n} есть величина обратная a^n. Например, какое число обратно 4? Очевидно, $\frac{1}{4}$ будет тем числом, на которое надо умножить 4, для того, чтобы в произведении получилась единица. Отсюда 4^{-1} равно $\frac{1}{4}$. Иначе: $4 = 2^2$, потому мы можем сказать, что 2^{-2} есть число, обратное 4, или 2^2.

Все учение о степенях целых, дробных и отрицательных называется *теорией показателей*; теория эта имеет немаловажное значение в области математического исследования символических величин. Изложение этих вопросов завело бы нас, однако, далеко за пределы поставленной нами задачи. Мы бегло рассмотрели их для того, чтобы читатель мог овладеть той частью следующей главы, в которой мы пользуемся степенями с дробными показателями.

ГЛАВА IV.

Положение.

§ 1. Всякое положение относительно.

Читатель без труда вспомнит случаи, когда к нему обращались прохожие с вопросами в роде следующих: „Не можете ли сказать мне, где находится такая-то гостиница?“, или „Как мне пройти к собору?“, или „Где находится такая-то улица?“ Ответ на этот вопрос, в какой бы форме мы его ни выразили, может быть передан одним словом—*там*. Ответ указывает *положение* (место) здания или улицы, которые разыскивают. На практике слово *там* переходит в фразу в роде следующей: „Ступайте прямо, затем поверните на первую улицу направо, потом на вторую улицу налево и, пройдя 80 сажен, вы очутитесь перед гостиницей, которую вы ищете“.

Рассмотрим несколько более подробно подобный вопрос и ответ. Вопрос: „Где находится такая-то гостиница?“ мы можем передать более пространно так: „Как мне пройти *отсюда* (то-есть от того места, где вопрос был задан) к этой гостинице?“ Это, очевидно, и есть настоящий смысл вопроса. Если бы прохожему сказали, что она находится в трехстах шагах от городской думы по такой-то дороге, то это сообщение не имело бы никакого значения для спрашивавшего, если бы он не знал места, где находится городская дума или, по крайней мере, где находится эта дорога. В одинаковой мере бесполезен для него и такой ответ: „Гостиница находится сейчас за верстовым столбом на сорок второй версте“, если предположить, что спрашивающий не знает места, где проходит эта дорога.

Но оба эти указания в известном смысле являются ответами на вопрос: „Где находится гостиница?“ Ответы эти были бы правильным способом указания *там*, если бы вопрос был задан на месте, откуда была бы видна городская дума, или, если бы весь разговор происходил на дороге, названной отвечающим лицом.

Мы видим отсюда, что вопрос *где* допускает бесчисленное множество ответов в зависимости от бесчисленного множества положений, или возможных *здесь* задающего вопрос. *Где* всегда включает в себе наличность определенного *здесь*, откуда именно и необходимо определить желаемое положение.

Читатель сразу увидит, что спросить: „Где находится гостиница“. не подразумевая при этом: „Где находится эта гостиница по отношению к какому-либо другому месту“, значит, задать вопрос, на который так же нельзя ответить, как нельзя ответить на вопрос: „Как пройти от гостиницы такой-то куда-нибудь“, если не иметь в виду ни одного определенного места в частности.

Это приводит нас к нашему общему соображению в вопросе о положении. Мы можем описать для данного места или предмета его *где* только при помощи описания того, как достигнуть его, идя от некоторого другого известного предмета или места. Их *где* мы определяем по отношению к *здесь*. Соображения эти кратко можно выразить так: *всякое положение относительно.*

Подобно тому, как гостиница занимает известное положение лишь относительно других зданий города, подобно тому, как сам город занимает положение лишь относительно других городов, совершенно так же любое тело в пространстве может занимать положение лишь по отношению к другим телам в пространстве. Говорить о положении земли в пространстве немыслимо без того, чтобы при этом одновременно не подумать о солнце, о Юпитере или о какой-нибудь звезде, т.-е., вообще говоря, о том или другом небесном светиле. Это заключение иногда пересказывают иначе, говоря об „одинаковости пространства повсюду“. Говоря это, мы имеем в виду лишь то, что в самом пространстве нет ничего постигаемого чувствами, что могло бы служить для определения положения [1]). Пространство было и есть чистая карта, на которую мы наносим наши предметы. Существование предметов на этой карте и позволяет нам отличать в любой момент один предмет от другого. Этот процесс распознавания предметов, предполагающий наличность, по крайней мере, *двух* предметов, распознать которые необходимо, на самом деле, сводится к различению *этого* и *того*, к различению *здесь* и *там*. Этот процесс заключает в себе понятие относительности положения.

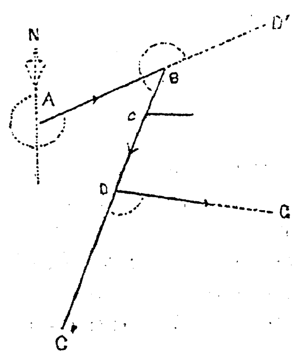
§ 2. Положение может быть определено при помощи отрезков прямых, имеющих направление.

Обратимся теперь от вопроса „Где находится такая-то гостиница“? к ответу: „Идите прямо, повернете на первую улицу справа, далее на вторую улицу слева и, пройдя по последней 80 сажен, очутитесь перед гостиницей, которую вы ищете“.

---

[1]) К этому вопросу мы вернемся позже.

Указание „итти прямо" предполагает, что, следуя ему, спросивший будет итти по той улице, где вопрос был задан, в направлении („прямо"), определяемом предшествовавшим движением спрашивавшего или указанием руки того, кого спросили. Предполагая, что в нашем настоящем случае улицы не кривы, мы можем сказать, что это равносильно словам: „держитесь известного направления". Но на каком протяжении? На это ответом служит второе указание: „поверните на первую улицу справа". Говоря более точно, мы должны были бы, если бы первый поворот надлежало сделать, пройдя 64 сажени, сказать так: пройдите в этом направлении 64 сажени. Пусть это указание будет представлено на нашем чертеже (черт. 53) отрезком AB, где A место, на котором был предложен вопрос. В B прохожий должен повернуть вправо и далее, согласно третьему указанию, пройти мимо первой слева улицы в C и повернуть на вторую улицу слева в D.



Черт. 53.

При большей точности мы должны были бы указать, что расстояние BD равно, скажем, 77 саженям.

Соединяя в одно второе и третье указание, мы можем выразить их так: пройдите 77 сажен от B в таком-то определенном направлении, а именно в направлении BD. Для того, чтобы точно определить соотношение между первоначальным направлением AB и этим направлением BD, мы можем воспользоваться следующим приемом. Если бы прохожий не изменил направления своего движения в B, но прошел бы далее прямо 77 сажен, он пришел бы в точку D'. Таким образом, если бы мы измерили угол $D'BD$ между направлением улицы, на которой был предложен вопрос, и направлением первой улицы справа, на которую надо повернуть, то мы знали бы точно направление BD и положение D.

Оно определится при помощи вращения BD' около точки B на измеренный угол $D'BD$. Если мы примем для измерения положительных углов то же условие, как и для измерения положительных площадей (см. стр. 106), то угол $D'BD$ будет углом, большим двух прямых. На этот угол надо повернуть в направлении обратном часовой стрелки BD' для того, чтобы она приняла положение BD. Обозначим для краткости этот угол $D'BD$ буквой β. Введем теперь новый символ $\{\beta\}$ для обозначения операции, выражаемой словами так: поверните направление, в котором вы идете, на угол β в сторону, обратную движению часовой стрелки. Если мы воспользуемся символом $\frac{\pi}{2}$ для обозначевия прямого угла, то у нас получатся следующие символически выраженные указания:

$\{0\}$ = идите прямо.

$\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ = повернитесь на прямой угол влево.

$\{\pi\}$ = сделайте полный оборот и идите обратно.

$\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$ = повернитесь на прямой угол вправо.

Таким образом, угол поворота AB влево, указываемый нашей символически записанной операцией, меньше двух прямых, а при повороте от AB вправо—больше двух прямых.

Если бы лицо, которому были даны указания, вместо того, чтобы итти в D, прошло бы до D', то оно прошло бы всего 64 сажени до B и потом 77 сажень до D'. Значит, был бы пройден путь $AB+BD'$, т.-е. 64 сажени $+$ 77 сажен.

Для того, чтобы показать, что прохожий в точке B перестает итти прямо по прежнему направлению, мы вводим поворотный множитель, а именно $\{\beta\}$, ставим его перед 77 саженями и читаем $64+\{\beta\}77$, как такое указание, пройдите 64 сажени в некотором направлении AB и затем, изменив направление движения поворотом на угол β в сторону, обратную движению часовой стрелки, пройдите 77 сажен в этом новом направлении.

Теперь мы уже в состоянии пополнить символическое выражение наших указаний о том, как найти путь к гостинице. Четвертое наставление гласит: поверните налево в D и пройдите по указываемому таким образом направлению 80 сажен. Пусть DG' представляет 80 сажен, отмеренных от D на продолжении BD; теперь нам необходимо повернуть DG' на некоторый угол $G'DG$ в сторону, обратную движению часовой стрелки, вследствие чего DG' примет положение DG. Тогда G будет местом, где находится гостиница. Обозначив угол $G'DG$ буквой γ, последнее указание можем выразить символически в виде $\{\gamma\}80$. Таким образом все указания относительно дороги, взятые вместе, символически могут быть записаны так:

$$64+\{\beta\}77+\{\gamma\}80,$$

где за единицу принята одна сажень.

Но мы еще не вполне свободны в этой символической записи от указания направления при посредстве направлений улиц: первые 64 сажени приходится пройти все же *по улице*, на которой задан вопрос. Мы можем избегнуть указания этой улицы, предположив, что ее направление определяется посредством угла, на который должна повернуться в сторону, обратную своему движению, часовая стрелка, чтобы прийти в это положение, при чем исходным положением стрелки будет некоторое другое строго определенное или выбранное нами направление. Предположим, например, что у нашего прохожего имеются компас в A', и пусть AN показывает направление стрелки компаса. Тогда мы можем установить положение улицы AB, описывая его как некоторое направление, составляющее столько-то градусов с направлением стрелки, считая от севера к востоку; придерживаясь нашего способа счета углов в сторону, обратную движению часовой стрелки, мы определим это положение углом a, который должна была описать стрелка, перемещаясь в направлении запад-юг для того, чтобы прийти в положение AB. В таком случае обозначение $\{a\}$ 64 мы истолковываем так: пройдите 64 сажени в направлении, образующем угол a с линией север-юг, отсчитывая этот угол к западу от этой линии.

Наш ответ, выраженный при помощи символов, теперь совершенно очищен от представлений, связанных с улицами. Действительно,

$$\{a\}\,64 + \{\beta\}\,77 + \{\gamma\}\,80$$

представляет собой совершенно определенное указание, как переместиться из A в G, поставленное вне зависимости от чего-либо характерного для данной местности. Наш ответ выражает положение G по отношению к A чисто-геометрическим путем, при посредстве ряда *отрезков* (*поступов*), *имеющих направление*. Переводя наши символы более пространно на обыденную речь, читаем этот ответ так: из точки A, находящейся на некоторой плоскости, отложите отрезок AB в 64 единицы в направлении, составляющем угол a с некоторым строго определенным направлением; к точке B приложите отрезок BD в 77 единиц, образующий с AB угол β, и, наконец, в D возьмите отрезок DG в 80 единиц, образующий с BD угол γ. Все углы должны быть отсчитаны в направлении, обратном движению часовой стрелки, подобно тому, как это нами описано выше.

§ 3. Сложение поступов, имеющих направление (сложение векторов).

Если мы сравним наш чертеж с записанным символами указанием: $\{a\}\,64 + \{\beta\}\,77 + \{\gamma\}\,80$, то увидим, что $\{a\}64$ представляет собой отрезок AB, когда отрезок этот рассматривается, как имеющий не только известную величину, но и *направление*. Равным образом, BD и DG являются не только линиями, выражающими число, но они в то же время поступы, имеющие направление. Поэтому мы с полным правом можем заменить наше выраженное символически указание

$$\{a\}\,64 + \{\beta\}\,77 + \{\gamma\}\,80$$

геометрически равнозначущею ему суммой

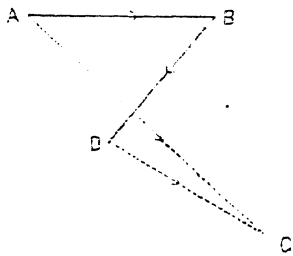
$$AB + BD + DG.$$

с условием, что под отрезками AB, BD и DC и символом $+$ мы подразумеваем нечто совершенно отличное от наших прежних представлений об этих длинах и знаке. Мы придаем новое и более широкое толкование нашим величинам и нашему действию сложения.

Сумма $AB + BD + DG$ указывает не на то, что мы должны прибавить к числу единиц длины, содержащихся в AB, число единиц длины, содержащихся в BD; сумма эта предписывает нам взять поступ AB в известном *направлении*, затем из конца этого первого отрезка отложить отрезок BD в другом определенном направлении и, наконец, из конечной точки D второго отрезка взять третий имеющий направление поступ. Вся эта операция, в конце-концов, приводит нас из A в G. Очевидно, что мы могли достигнуть G также, взяв имеющий направление поступ AG. Поэтому, если придать расширенное толкование слову „равно“ и его знаку $=$, пользуясь ими уже для указания равнозначительности результатов двух операций, то можно будет написать, что

$$AG = AB + BD + DG.$$

Это выражение мы прочтем так: AG равняется сумме AB, BD и DG.



Черт. 54.

Поступы, подобные рассмотренным нами в главе о величинах, были отрезками известных размеров, откладываемыми вдоль по какой-нибудь прямой линии. Они называются *скалярными (мерными)* длинами [1], или, короче, *скалярами*, так как оне указывают лишь на известное отношение к некоторой величине, принятой нами за меру (за ступень). Скаляры мы складываем или вычитаем, прикладывая их друг к другу концами, при чем *безразлично*, на какой прямой линии (см. главу III, § 2) мы это выполняем.

Отрезок, имеющий не только известные размеры, но и *направление*, называется *вектором*, так как он *переводит* [2]) нас из одного положения в пространстве в другое. Обыкновенно принято обозначать стрелкой направление, в котором надо откладывать такие векторы. Например, на чертеже 54 нам надо перейти от A к B; стрелка поэтому должна быть для вектора AB направлена острием к B. Буквами это обозначается посредством постановки буквы A перед буквой B. Соображения, при помощи которых мы пришли к понятию векториальных длин, указывают в то же время сразу и на то, как векторы складывать.

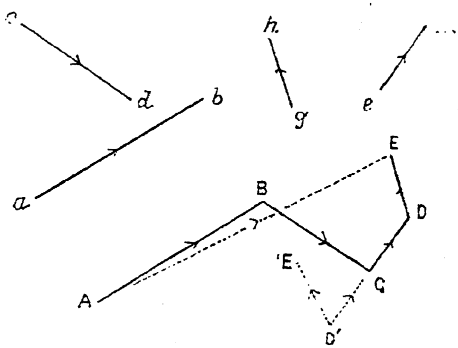
Векторы складываются путем последовательного приложения их друг к другу таким образом, чтобы они сохраняли характерные для

---

[1]) См. примечание в конце книги.

[2]) Vehor—везу; vector—везущий.

них направления; благодаря этому, точка, движущаяся по образовавшейся у нас из этих длин ломанной линии, будет все время перемещаться по направлениям, указанным стрелками. Сжато это условие сложения векторов можно передать, сказав, что отрезки должны следовать один за другим так, чтобы была соблюдена *непрерывность*. Сумма векторов представится в таком случае единственной имеющей направление длиной, соединяющей точку отправления получившейся у нас зигзагообразной линии с ее конечной точкой. Пусть ab, cd, ef, gh (черт. 55) поступы, имеющие направление. Начертим теперь отрезок AB, равный и параллельный ab; из точки B проведем отрезок BC, равный и параллельный cd; из точки C откладываем длину D, равную и параллельную ef, и, наконец, из D чертим отрезок DE, равный и параллельный gh. Наша зигзагообразная линия проведена так, что стрелки следуют друг за другом в одном и том же смысле „непрерывно“. Отсюда вытекает, что имеющий направление отрезок AE есть длина четырех заданных векторов. Если бы, например, в точке C мы провели бы отрезок CD', равный и параллельный ef, но по другую сторону от BC, нежели CD, а затем взяли длину $E'D'$, равную и параллельную gh, то мы тотчас бы увидели, что стрелки на BC, CD' и $D'E'$ идут не непрерывно в одном и том же направлении; иначе говоря, от точки C мы пошли не по должному направлению.



Черт. 55.

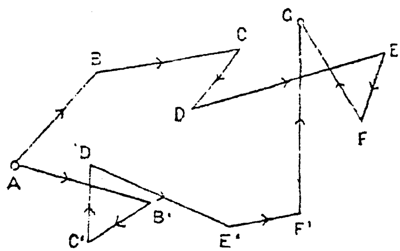
Если все векторы имеют одно и то же направление, ломаная линия обращается в прямую. При этом векториальные длины складываются совершенно так же, как скалярные. С другой стороны, если представится случай векториальные отрезки рассматривать, как скалярные (то-есть лишь со стороны их размеров), то наше сложение в его расширенном понимании заменится сложением обыкновенным арифметическим.

Мы можем теперь установить чрезвычайно важную точку зрения на определение положения на плоскости, а именно: если положение G относительно A может быть обозначено имеющим направление отрезком, или вектором AG, то то же направление может быть выражено некоторой суммой векторов, при чем точка отправления первого из них должна находиться в A, конечная же точка последнего в G (см. черт. 56). Это соображение можно записать символически в такой форме:

$$AG = AB + BC + CD + DE + EF + FG.$$

Не надо прибавлять, что в нашем примере с отысканием места, в котором находится нужная нам гостиница, прохожий мог пройти к намеченному месту, руководствуясь совершенно другим рядам указаний.

В самом деле, могло случиться так, что ему пришлось бы сделать много длинных „крюков" в самом городе или его окрестностях, прежде чем он пришел бы на разыскиваемое им место. Но как бы он ни прошел в G, конечным результатом его странствований было бы то, чего он мог бы достигнуть посредством прямого перехода, имеющего направление AG (то-есть „как вороны летают"), если предположить, что на пути ему не представилось бы никаких препятствий. Отсюда мы видим, что при нашем расширенном понимании сложения любые две ломаные $ABCDEFG$ и $A'B'C'D'E'F'G$ составленные из отрезков, имеющих определенное направление (такие ломаные могут содержать одинаковое или неодинаковое число слагающих отрезков), с точкой исхода в A и концом в G, могут быть рассматриваемы, как указания равнозначущие:



Черт. 56.

$$AB + BC + CD + DE + EF + FG = AG = AB' + B'C' + C'D + \\ + D'E' + E'F' + F'G.$$

Другими словами, можно принять, что две последовательности векторов имеют одну и ту же сумму, если при одной и той же точке отправления отрезки обеих последовательностей, будучи сложены векториально, приводят к одной и той же конечной точке.

Предположим теперь, что наш прохожий, сам того не зная, находился перед зданием нужной ему гостиницы в тот момент, когда задавал вопрос о том, как пройти к этому зданию. Предположим далее, что лицо, которое об'ясняло, как пройти, дало ему совершенно верные указания, но, тем не менее, заставило его пройти значительное расстояние по городу, выполнить целую совокупность соответственно выбранных поворотов направо и налево для того, чтобы, в конце-концов, вернуться к месту A, из которого он отправился.

В этом случае мы должны предположить, что здание гостиницы находится не в точке G, но в точке A.

Конечный результат всех странствований прохожего по городу, странствований, приведших его в место, из которого он отправился, может быть обозначаем, как *поступ нуль*; мы можем, значит, написать (черт. 56), что

$$AB + BC + CD + DE + EF + FG + GA = O \text{ (I)}.$$

Словами мы имеем право передать этот результат так: сумма векторов, представляющих последовательные колена замкнутой ломаной линии, равна нулю. Мы нашли перед тем, что

$$AB + BC + CD + DE + EF + FG = AG \text{ (II)}.$$

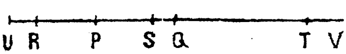
Для того, чтобы положение (I) и (II) были положениями совместными, необходимо, чтобы

$$-GA = AG,$$

или чтобы

$$AG + GA = O.$$

Это последнее положение в сущности гласит, что вся операция соединения вектора AG с другим вектором, взятым от G до A, в итоге дает вектор-нуль. Но результат этот интересен в следующем отношении: он показывает, что если поступ от A до G мы считаем *положительным*, то поступ, отсчитываемый от G до A, мы должны принять за *отрицательный*. Это соображение позволяет нам свести вычитание векторов на сложение. Действительно, если мы называем действие, обозначаемое $AB - DC$, *вычитанием*, то в силу того, что $DC + CD = O$, показанное действие сводится к сложению векторов AB и CD, т.-е. к сумме $AB + DC$. Таким образом, чтобы вычесть один вектор из другого, мы придаем одному из них обратный смысл и затем складываем с другим.



Черт. 57.

Вывод, к которому мы пришли, $AG + GA = O$ может быть распространен на любое число точек, расположенных на некоторой прямой. Таким образом, если $PQKSTUV$ (черт. 57) есть совокупность таких точек, то

$$PQ + QR + RS + ST + TU + UV + VP = O.$$

Действительно, отправившись из P и последовательно проходя указанные длины, мы, очевидно, придем обратно в P; другими словами, мы совершим при этом операцию, результат которой равнозначущ нулю, т.-е. равнозначущ тому, как если бы мы все время оставались на месте, из которого отправились.

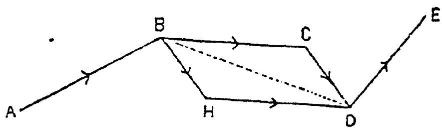
§ 4. Сложение векторов подчиняется перестановительному закону.

Мы можем доказать, что перестановительный закон сохраняет силу и по отношению к сложению в его расширенном нами толковании (см. стр. 16). Покажем сперва, что два последовательные отрезка могут взаимно обменяться местами. Рассмотрим четыре последовательных отрезка AB, BC, CD и DE. Если бы мы, вместо того, чтобы построить в точке B отрезок BC, построили бы отрезок BN, по размерам, смыслу и направлению равный CD, мы могли бы пройти из H в D, взяв отрезок HD. Соединим B и D; в треугольниках BHD и BCD углы с вершинами в B и D равны, так как они образованы прямой BD и двумя пересеченными ею параллельными BN и CD; кроме того, BD общая сторона, а BN равна CD. Отсюда следует (см. стр. 65), что треугольники эти одной и той же формы и одного и того же размера, или что $HD=BC$; угол BDH равен, стало-быть, углу DBC, а HD и BC — параллельны. Таким образом отрезок HD равен отрезку BC по направлению и размерам и обращен в ту же сторону. Эти два способа перехода от B к D приводят нас к равенствам:

$$BC+CD=BD=BH+HD=CD+BC,$$

чем наше положение и доказано.

Отсюда следует, что два последовательных отрезка могут быть переставлены посредством совершенно такого же рассуждения, как то, которое мы приводили на стр. 20, можно показать, что, если мы в праве переставить два каких-либо последовательных отрезка нашей ломаной, то мы в праве также переставить вообще два каких угодно отрезка, и это достигается посредством ряда перестановок последовательных отрезков. Другими словами, порядок, в котором складываются векторы, на результат сложения влияния не оказывает.



Черт. 58.

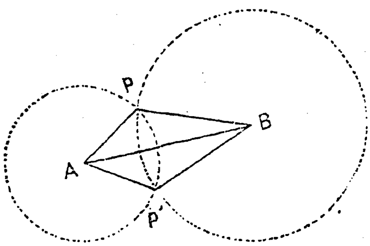
Важность геометрии векторов обусловливается тем обстоятельством, что многие физические величины могут быть представлены длинами, имеющими направление. Мы увидим в следующей главе, что скорости и ускорения и есть именно величины такого характера.

§ 5. О способах определения положения на плоскости.

Мы уже указали (см. стр. 82), что скалярные величины можно представлять отрезками, отмериваемыми на некоторой прямой.

В этом случае необходимо иметь лишь одну наперед заданную точку этой прямой. Для определения относительного положения всякой другой точки достаточно определить размеры отрезка прямой, заключенного между этими двумя точками. Прямую линию обыкновенно рассматривают как пространство *одного* измерения; в пространстве одного измерения одной точки достаточно для определения относительного положения всех других точек.

Когда же мы рассматриваем положение точек на плоскости, то для определения местонахождения точки P по отношению к другой точке A мы должны знать не только размеры, но и *направление* отрезка AP. Поэтому, что для пространства одного измерения представляют величины скалярные, то для пространства плоского представляют векторы. Для того, чтобы определить *направление* поступа AP, мы должны знать, по крайней мере, еще одну точку B на плоскости. Пространство, которое для определения положения какой-нибудь точки требует еще двух других точек обыкновенно называется пространством *двух* измерений.

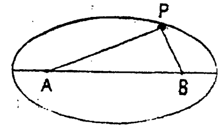


Черт. 59.

Существует несколько различных общеупотребительных приемов для определения положения точек в пространстве двух измерений. Мы упомянем лишь о немногих из этих приемов, ограничиваясь притом соображениями, относящимися только к плоскости, т.-е. к пространству двух измерений, которое имеет одинаковую форму по обе стороны.

(α) Мы можем измерить расстояние между A и P и B и P'. Если эти расстояния имеют своими скалярными величинами соответственно r и r', то найдутся две точки, отвечающие двум данным значениям r и r'. А именно такими точками будут точки пересечения двух окружностей (черт. 59), центры которых находятся в A и B, а радиусы соответственно равны r и r'. Эти две точки мы можем отличать друг от друга, как точки, из которых одна лежит выше AB, а другая—ниже AB. Только в случае касания окружностей эти две точки совпадают; в тех же случаях, когда окружности не имеют ни одной общей точки, мы не будем иметь ни точки P, ни точки P'.

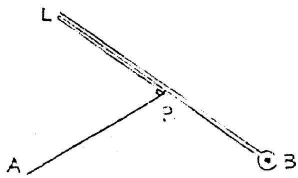
Если P движется так, что для каждого ее положения относительно A и B величины r и r' удовлетворяют некоторому определенному отношению, то у нас получается совокупность точек, лежащих на плоскости или на кривой линии какого-либо рода. Например, если мы привяжем концы куска нитки, длина которой l, к буквам, воткнутым в плоскость бумаги, в A и B (черт. 60) и затем будем передвигать карандаш так, чтобы его острее P все время оставалось на бумаге, натягивая нитку, карандаш вычертит ту тень (проекцию) окружности, которую мы назвали эллипсом.



Черт. 60.

В этом случае $r + r' = AP + PB = l$, то—есть постоянной длине нити. Это соотношение $r + r' = l$ представляет собой уравнение между скалярными величинами r и r' и l, остающееся в силе по отношению к каждой точке эллипса и выражающее размеры кривой по отношению к точкам A и B.

Если, с другой стороны, мы заставим P двигаться так, чтобы разность между AP и BP имела постоянную длину, то P вычертит кривую, названную нами гиперболой. Мы можем заставить P двигаться именно таким образом при помощи чрезвычайно простого механизма. Предположим, что у нас имеется стержень BL (черт. 61), который может вращаться около одного из его концов B, а также нить данной длины, прикрепленная к другому концу стержня L и к неподвижной точке A. Если теперь вращать стержень вокруг точки B, придерживая нить плотно у стержня острием карандаша P, то карандаш вычертит гиперболу.

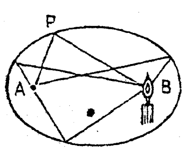


Черт. 61.

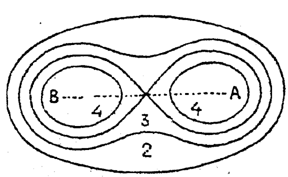
В самом деле, сумма $LP+PA$ равна постоянной длине, а именно, длине нити, $LP+PB$ есть также постоянная длина, а именно, длина стержня; разность между ними, или $PA-PB$, равна постоянной длине, именно разности между длинами нити и стержня.

Точки A и B в обоих случаях эллипса и гиперболы называются *фокусами*. Это название обязано своим происхождением следующему интересному свойству этих кривых. Предположим, что кусок часовой пружины согнут по эллипсу так, что ее гладкая часть обращена к фокусам эллипса. Если в один из фокусов B поместить нагретое тело, то все лучи тепловые или световые, испускаемые телом в B и падающие на пружину, соберутся, как выражаются, в фокусе A.

В силу этого, A будет наиболее освещенной и нагретой точкой, нежели другие внутри эллипса (за исключением, конечно, B). Слово „фокус“ взято с латинского и означает очаг. Это свойство эллипса и гиперболы, свойство собирать в одном из фокусов лучи, испускаемые из другого фокуса, обусловливаются тем, что AP и PB образуют с кривой в точке P равные углы.



Черт. 62.



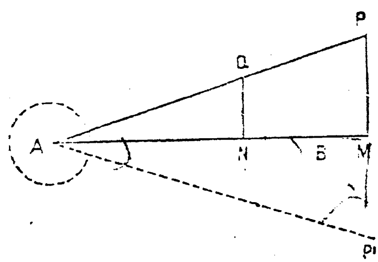
Черт. 63.

Указанное геометрическое свойство кривых находится в соответствии с физическими свойствами тепловых и световых лучей, а именно, с тем обстоятельством, что оне, падая под известным углом на отражающую поверхность, под тем же углом от нее и отражаются.

Третья замечательная кривая, получающаяся легко при помощи указанного нами первого способа рассмотрения положений, есть *лемниската* (черт. 63) Якова Бернулли (название это взято с латинского: *lemniscus*-лента). Она вычерчивается точкой P, движущейся так, что прямоугольник, построенный на расстояниях ее от точек A и B, как на сторонах, всегда равнялся бы площади данного квадрата $(rr' = c^2)$. Если заданный квадрат больше квадрата, построенного на половине AB, то P, очевидно, никогда не пройдет между A и B; если он равен квадрату, построенному на половине AB, лемниската принимает вид восьмерки; если же он меньше этого квадрата, то кривая распадается на две петли. На чертеже представлен ряд лемнискат. Совокупность кривых, полученных путем изменения величины постоянной, подобной данному квадрату в случае лемнискаты, называется *семейством кривых*. Такие семейства кривых мы постоянно встречаем при рассмотрении физических вопросов.

§ 6. Полярные координаты.

(β) Точки A и B определяют прямую, направление которой AB (черт. 64). Если мы знаем длину AP и угол BAP, то мы в состоянии найти положение точки P. Пусть r будет число линейных единиц, заключающихся в AP, а θ число угловых единиц в угле BAP, при чем r θ могут быть, разумеется, и дробями. При измерении угла θ мы будем пользоваться теми же условиями, что и при рассматрении площадей (см. стр. 107); а именно, если прямая, первоначально совпадающая с AB, далее выходит из этого положения и, вращаясь вокруг A, как своей оси, по направлению, обратному движению часовой стрелки, движется до совпадения с AP, то мы говорим, что она описывает угол θ. Углы, описываемые прямой, вращающейся по направлению движения часовой стрелки, считаются, подобно площадям, отрицательными. Таким образом, угол BAP', находящийся ниже AB, может быть получен путем вращения по направлению движения часовой стрелки от AB к AP' и потому должен быть рассматриваем как отрицательный. С другой стороны, мы можем заставить прямую, вращающуюся вокруг A, принять положение AP' путем поворота ее по направлению, обратному движению часовой стрелки на угол, обозначенный на нашем чертеже дугой круга (пунктиром). Далее мы могли бы, очевидно, достигнуть AP вращением прямой вокруг A по направлению движения часовой стрелки и, таким образом, представить положение P отрицательным углом. Но после того, как мы достигли P, мы можем все же заставить нашу прямую совершить целое число оборотов A (в сторону движения часовой стрелки или в обратном направлении) и в конце любого целого числа таких обращений мы будем все в том же положении P.



Черт. 64.

Итак, мы располагаем следующими четырьмя способами вращения прямой вокруг A, от момента совпадения ее с AB до совпадения с AP:

I. вращение по направлению, обратному движению часовой стрелки от AB к AP;

II. вращение по направлению движения часовой стрелки от AB к AP;

III. первое из этих вращений в соединении с целым числом оборотов по направлению движения часовой стрелки или по направлению обратному;

IV. второе из этих вращений в соединении с каким-либо числом полных оборотов по направлению движения часовой стрелки или по направлению обратному.

При пользовании этим способом обозначения положения в пространстве приняты следующие обозначения:

Прямая AB, от которой мы начинаем вращение нашей прямой, называется *начальной* прямом; длина AP называется *радиусом вектором* (радиус вектор—два латинских слова, в переводе означающих—везущая спица, ибо она переводит точку P в требуемое положение); угол BAP называется *углом вектора с осью* (иначе *амплитудой*), потому что он описан радиусом вектором, во время передвижения последнего из положения AB в требуемое положение AP; A носит название *полюса*, так как эта точка является концом оси, вокруг которой, как мы можем предположить, спица вращается. Наконец AP $(=r)$ и угол BAP $(=\theta)$ получили название *полярных координат* точки P, в виду того, что они определяют положение P относительно полюса A и начальной прямой AB.

§ 7. Тригонометрические отношения.

Пусть PM—перпендикуляр, опущенный из P на AB (см. черт. 64); тогда отношениям сторон прямоугольного треугольника PAM друг к другу дают для краткости следующие названия:

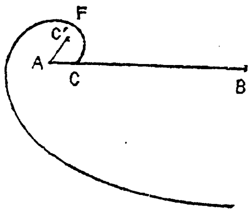
$\frac{PM}{AP}$, или отношение такого перпендикуляра к гипотенузе, называется *синусом* угла BAP.

$\frac{AM}{AP}$, или отношение основания треугольника PAM к гипотенузе, называется *косинусом* угла BAP.

$\frac{PM}{AM}$, или отношение перпендикуляра к основанию называется *тангенсом* угла BAP.

$\frac{AM}{PM}$, или отношение основания к перпендикуляру, называется *котангенсом* угла BAP.

Если θ скалярная величина угла BAP, то эти отношения для краткости обозначаются соответственно: $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\mathrm{Tang}\,\theta$ и $\cot\theta$. Возьмем на AP какую-нибудь другую точку Q и опустим из нее на AB перпендикуляр; в таком случае треугольники QAN и PAM имеют одну и ту же форму (см. стр. 88), а потому в них отношения соответственных сторон равны. Отсюда следует, что такие отношения, как синус, косинус, тангенс и котангенс для треугольников QAN и PAM одни и те же. Мы видим, что $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\mathrm{Tang}\,\theta$, $\cot\theta$ не зависят от положения P на AP; это отношения, зависящие только от величины угла BAP или θ. Они называются (это название взято с греческого и происходит от двух слов, означающих *измерение треугольников*) *тригонометрическими отношениями* угла θ. Рассмотрение тригонометрических отношений, или *тригонометрии*, составляет важный отдел чистой математики.



Черт. 65.

Название отдельных тригонометрических отношений ведут начало от старинной терминологии, связывавшей эти отношения с видом, какой представляет стрелок, у которого тетива лука была прижата к его груди [1]).

§ 8. Спирали.

Допустим, что спица AP обращается вокруг полюса A; пусть также во время ее обращения точка P движется вдоль по спице таким образом, чтобы величина AP, или, иначе, r, находилась все время в каком-нибудь известным образом выбранном определенном отношении к величине θ, или BAP. Если точкой P будет служить конец карандаша, то этот конец опишет кривую линию в плоскости бумаги.

Такая кривая линия называется *полярной кривой* или *спиралью*. Последнее название взято с греческого, где это слово указывает на свивание в кольца, как у змеи, так как некоторые из этих кривых до известной степени на эти кольца походят.

Одну из наиболее интересных спиралей изобрел Конон Самоский, но так как главные свойства ее были исследованы Архимедом, то спираль эта обыкновенно называется по его имени *архимедовой*. Спираль Архимеда черт. 65 определяется следующим простым образом: в то время, как спица AP равномерно обращается вокруг полюса,

[1]) На нашем чертеже угол BAP *меньше* прямого угла, но он может иметь какую угодно величину. Нашли, что удобно условиться относительно *знаков*, какие будут иметь перпендикуляр PM и основание AM. PM считается положительным, когда он находится над начальной прямой, и отрицательным, когда он лежит ниже ее. AM считается положительным, когда M попадает справа от A, и отрицательным, когда эта точка попадает слева от A. Читатель поймет значение этих условий лучше после изучения §§ 11 и 12.

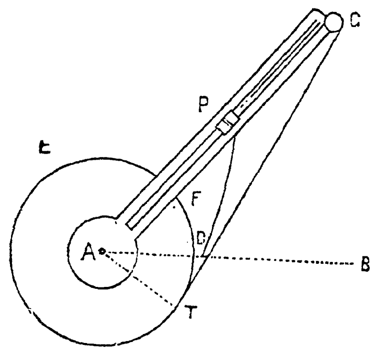
точка P движется равномерно вдоль по спице. Пусть C представляет положение P в тот момент, когда движущаяся спица совпадает с прямой отправления AB и пусть AC содержит a единиц длины. Далее, если P представляет положение конца карандаша, когда спица описала угол BAP, содержащий θ угловых единиц, и на AP отмерен отрезок AC', равный AC, то точка P за время поворота спицы на угол BAP пройдет расстояние $C'P$. Но так как точка и спица движутся равномерно, расстояние $C'P$ должно быть пропорционально углу CAP, или, иначе говоря, отношение этих двух величин должно быть неизменным для всех таких расстояний и углов. Пусть расстояние, проходимое точно по спице, когда последняя поворачивается на угол, равный единице, будет b; тогда $C'P$ должно равняться числу единиц, заключающихся в CAP, умноженному на b. Если для обозначения величины AP воспользуемся буквой r, то получим, что

$$C'P = b \times \theta, \text{ но } C'P = r - a,$$

откуда: $r = a + b\theta$.

Это соотношение между r и θ носит название полярного *уравнения* спирали.

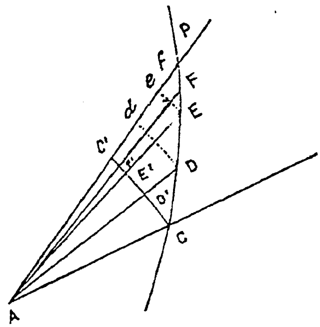
Следующий прибор (черт. 66), который легко построить, позволит нам вычертить спираль Архимеда. DEF—круговой диск известного радиуса; на краю этого диска вырезан желобок. К центру A диска прикреплен стержень или спица, которые могут обращаться вокруг A, как полюса; на другом конце стержня находится G небольшое колесико с желобком, или блок. К одной из точек D на желобке диска прикреплена нить, проходящая затем вокруг блока G и присоединенная к небольшой скобке P, в которой укреплен карандаш и которая может скользить по прорезу, сделанному в спице; если эту скобку



Черт. 66.

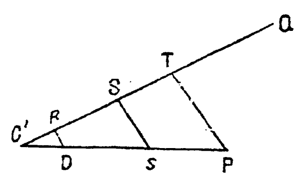
связать с A посредством резинки, то нить, идущая от P к G и от G к желобу на диске, будет все время натянута. Предположим теперь, что диск крепко прижат к бумаге, а спица AC обращается вокруг A по направлению, обратному движению часовой стрелки, тогда карандаш P опишет требуемую спираль. Действительно, так как нить касается диска в точке T, фигура GAT при вращении спицы вокруг полюса будет иметь постоянно одну и ту же величину и одну и ту же форму; отсюда следует, что длина отрезка нити GT — постоянна.

Таким образом, если кусок нити, представляемый дугой DT, будет навернут на диске в то время, как мы, поворачивая спицу, переместим ее из положения AB в положение AP, длина PG (в силу того, что GT остается по длине неизменным) должна уменьшаться при передвижении от P к C в P на кусок, равный DT. Но кусок нити DT, навернутый на диск, пропорционален углу, на который повернулась спица. Отсюда следует, что точка P должна была пройти по направлению к D расстояние, пропорциональное этому углу, или, иначе говоря, описать спираль Архимеда.



Черт. 67.

Раз хорошая спираль такого рода имеется у нас в распоряжении, мы в состоянии разрешить одну часто встречающуюся задачу, а именно, задачу о разделении угла на несколько частей, находящихся в известном отношении друг к другу. Пусть данный угол вершиной своей перенесен в полюс нашей спирали, и пусть радиусы векторы AC и AP. (см черт. 67) будут радиусами векторами, совпадающими с сторонами угла. Описываем из полюса A, как из центра, дугу окружности радиусом AC, которая пересечет AP в точке C'. Предположим теперь, что задача решена и что радиусами векторами AD, AE и AF наш угол разделен на требуемые пропорциональные части. Если эти радиусы векторы пересекают проведенную дугу окружности CC' соответственно в точках D', E' и F', то, в силу основного свойства спирали, получаем сразу, что прямые $D'D$, $E'E$, $F'F$, $C'P$ находятся в том же отношении, как и углы CAD, CAE, CAF, CAP. Таким образом, если мы отложим на AP длины Ad, Ae, Af, соответственно равные AD, AE и AF, то $C'P$ разделится в точках d, e, f на части, пропорциональные искомым углам. Обратно, если мы разделим $C'P$ на отрезки $C'd$, de, ef и $f\ P$, относящиеся друг к другу так же, как искомые части угла, то мы получим длины Ad, Ae, Af, которые будут служить радиусами кругов, имеющих общий центр в A и пересекающих спираль в точках, соответствующих искомому делению угла на части. Таким образом спираль Архимеда позволяет нам свести любого рода разделение угла на части на подобное же деление прямой.



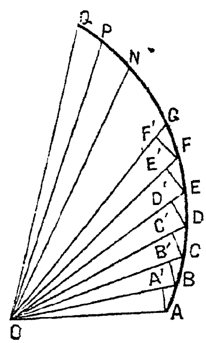
Черт. 68.

Но разделение прямой на любой манер, т.-е. разделение на ряд отрезков в данном отношении, разрешается сразу, как только мы научимся проводить параллельные линии при помощи циркуля или чертежного треугольника. Предположим, например, что требуется разделить прямую $C'P$ (черт. 68) на части в отношении $3:5:4$. Для этой цели достаточно отложить на какой-нибудь прямой, проведенной через C', скажем, на прямой $C'Q$, непосредственно один за другим отрезки $C'R$, RS, ST, содержащие соответственно 3, 5 и 4 какого бы то ни было рода единицы. Если конец последнего отрезка T соединить с P, провести параллельно PT через R и S прямые Rr и Ss, то $C'P$ разделиться в точках r и s в требуемом отношении $3:5:4$. Это следует прямо из нашей теории треугольников, имеющих одинаковую форму (см. стр. 88). Действительно, $RC'r$, $SC's$ и $TC'P$ и будут такими треугольниками поэтому в них соответственные стороны пропорциональны, и справедливость предложения таким образом очевидна.

Спираль Архимеда, тщательно выгравированная на металле или вырезанная на пластинке слоновой кости, является чрезвычайно полезным добавлением к обычному набору готовальни так называемых математических инструментов.

§ 9. Равноугольная спираль.

Другая важная спираль изобретена Декартом и по двум своим главным свойствам называется *равноугольной* или *логарифмической спиралью*. Пусть BOA (черт. 69) представляет собой треугольник с небольшим углом в O, при чем стороны его OA и OB не очень отличаются по длине друг от друга. На OB по другую сторону от A строим треугольник BOC такой же формы, как и треугольник AOB, при чем так, чтобы углы при B и при A были друг другу равны. Далее затем строим на OC треугольник COD такой же формы, как BOC или AOB; на OD строим четвертый треугольник DOE такой же формы, как и первых три; потом строим пятый треугольник на OE и так далее. Таким образом мы получаем фигуру, состоящую из известного числа треугольников AOB, BOC, COD, DOE и т. д., имеющих одну и ту же форму; вершинами одной группы равных углов эти треугольники помещены в точку O, при чем для каждой



Черт. 69.

пары треугольников имеется общая сторона, образованная двумя несоответственными сторонами (т.-е. не теми сторонами, которые лежат против равных углов). Точки A, B, C, D, E и т. д. служат вершинами многоугольной ломаной линии; если углы при O взяты достаточно малые, стороны полученного многоугольника образуют как бы непрерывную кривую линию. Эта кривая линия, к которой мы можем подойти как угодно близко, беря при O все меньшие и меньшие углы, называется *равноугольной спиралью*. Своим названием она обязана следующему своему свойству. Пусть AB, BC, CD и т. д. соответственные стороны треугольников, имеющих одну и ту же форму, образуют с соответственными сторонами OB, OC, OD и т. д. равные углы OBA, OCB, ODC и т. д. Если взять углы при O очень малыми, то AB, BC, CD и т. д. представят собой как бы последовательные элементы нашей кривой линии, или спирали. Отсюда следует, что дуга спирали пересекает лучи, проведенные из полюса O все под одним и тем же постоянным углом.

Попробуем теперь найти соотношение между каким-нибудь радиусом вектором $OP(=r)$ и векториальным углом $AOP(=\theta)$.

Так как наши треугольники AOB, BOC, COD и т. д. имеют одну и ту же форму, то их соответственные стороны должны быть пропорциональны (см. стр. 88);

поэтому:

$$\frac{OB}{OA}=\frac{OC}{OB}=\frac{OD}{OC}=\frac{OE}{OD}=\frac{OF}{OE} \text{ и т. д.}$$

Каждое из этих равных друг другу отношений имеет одно и то же скалярное значение. Обозначим это число символом μ. Тогда мы получим, что

$$OB=\mu OA;\ OC=\mu OB;\ OD=\mu OC \text{ и т. д.}$$

Или

$$OB=\mu OA;\ OC=\mu^2 OA;\ OD=\mu^3 OA \text{ и т. д.}$$

Отсюда, если ON будет радиусом вектором, находящимся там, где θ составлено из n равных углов, имеющих общую вершину в O, то мы найдем, что

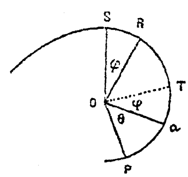
$$ON=\mu^n OA.$$

Пусть далее каждый из весьма малых углов при O будет равен какой-либо малой доле угла-единицы; таким образом, мы можем принять эти углы равными $\frac{1}{100}$ или $\frac{1}{1000}$ угла-единицы. Представим эту часть угла-единицы дробью $\frac{1}{b}$, где для большей простоты b мы можем считать числом целым. Воспользуемся далее для обозначения b-й степени μ буквой λ, что даст $\gamma=\mu^{b}$. Согласно определению, установленному на стр. 114, мы называем μ корнем степени b из γ, и пишем $\mu=\lambda^{\frac{1}{b}}$.

Отсюда, наконец, получаем: $ON=OA\lambda^{n}\times\frac{1}{b}$, что может быть передано следующими словами: основание $(n+1)$-ого треугольника, из числа сказанных треугольников, имеющих одинаковую форму и помещенных общей вершиной в O, равно основанию первого треугольника, умноженному на некоторую величину λ, возвышенную в степень $n \times \frac{1}{b}$, то-есть в степень n раз взятой величины $\frac{1}{b}$; последняя выражает в угловых единицах величину равных углов, вершина которых находится в O.

Предположим, что спица или луч OP находится внутри угла, образованного последовательными лучами ON и OQ, образующими один из системы треугольников одинаковой формы, расположенных вокруг O. Тогда ON образует с OA угол, равный произведению $\frac{1}{b}$ на n, OQ образует с тем же лучом OA угол, равный произведению $\frac{1}{b}$ на $(n+1)$. Равным образом величина OP должна заключаться между величинами ON и OQ. При помощи достаточного уменьшения равных углов мы можем все более и более приближаться к форме спирали, при чем луч OP будет все время находиться между двумя последовательными лучами нашей системы треугольников. Угол θ, который таким образом будет все время заключаться между $\frac{n}{b}$ и $\frac{(n+1)}{b}$, может отличаться от каждаго из двух последних углов лишь на величину, меньшую $\frac{1}{b}$. Если взять достаточно большое b, или, иначе, взять для величин равных углов при O достаточно малые доли угла-единицы, эта разность $\frac{1}{b}$ может быть сделана исчезающе малой. В этом случае мы можем сказать, что *в пределе* угол θ становится равным $\frac{n}{b}$, а луч OP равным ON или OQ, которые будут таким образом под конец друг другу равны. Значит, $OP = OA.\ \lambda^{\frac{1}{b}} = OA.\lambda^{\theta}$, что можно передать словами так: если луч равноугольной спирали OP образует с другим лучом OA угол AOP, то отношение OP к OA равно некоторому числу λ, взятому в степени θ, где θ есть величина угла AOP, выраженная в угловых единицах.

Если a и r будут числами, выражающими величины OA и OP, то мы получим, что $r = a\lambda^{\theta}$. Эта зависимость называется *полярным уравнением* спирали.



Черт. 70.

Теперь из рассмотрения этой спирали постараемся извлечь несколько важных положений. Читатель сразу замечает, что отношение пары лучей OP и OQ равно отношению всякой другой пары лучей, образующих равный угол, потому что отношение каждой пары лучей зависит только от угла, заключенного между ними. Далее, если нам надо было бы умножить отношение каких-нибудь двух величин p и q на отношение двух других r и s, то мы могли бы сделать это следующим образом: находим четыре луча равноугольной спирали OP, OQ, OR, OS (черт. 69), содержащих в себе столько же линейных единиц, сколько единиц заключается в p, q, r, s (см. стр. 120), пусть θ угол, заключающийся между первой парой, φ угол, образуемый второй парой.

В таком случае

$$\frac{OQ}{OP}=\lambda^{\theta}, \text{ и } \frac{OS}{OR}=\lambda^{\varphi};$$

отсюда следует, что

$$\frac{OQ}{OP}\times\frac{OS}{OR}=\lambda^{\theta}\times\lambda^{\varphi}=\lambda^{\theta+\varphi},$$

или, иначе говоря, это произведение равно отношению какой-либо пары лучей, заключающих угол $\theta+\varphi$. Таким образом, если угол QOT равен φ, при чем OT соответственный радиус спирали, то

$$\frac{OT}{OP}=\lambda^{\theta+\varphi},$$

и это есть отношение, равное произведению двух данных отношений. Отсюда для того, чтобы найти произведение отношений, достаточно сложить углы, заключенные между соответственными парами лучей в данных отношениях, и отношение двух каких-либо лучей, заключающих угол, равный полученной сумме, будет равно искомому произведению. Таким образом равноугольная спираль позволяет нам *заменить умножение сложением.* Это—чрезвычайно ценная замена одного действия другим, так как гораздо легче складывать, нежели умножать.

Так как частное от деления $\frac{OQ}{OP}$ на $\frac{OS}{OR}$ равно частному, получаемому от деления λ^{θ} на λ^{φ}, то-есть $\lambda^{\theta-\varphi}$, то мы можем, очевидно, таким же образом, как и выше, заменить деление двух отношений вычитанием двух углов. Совокупность величин, подобных углам при полюсе равноугольной спирали, позволяющая нам заменить умножение и деление сложением и вычитанием, называется *таблицей логарифмов.* Так как равноугольная спираль может служить как бы графической записью таблицы логарифмов, то ее часто называют *логарифмической спиралью.*

§ 10. О природе логарифмов.

Так как в логарифмической спирали $OP=OA\times\lambda^{\theta}$, где θ равно углу AOP, то при возрастании угла θ, или при обращении луча OP вокруг O, луч этот, при приросте амплитуды AOP на одинаковые величины, как мы видим, будет помножаться равномерно. Когда одна величина находится в зависимости от другой, при чем зависимость эта такого рода, что первая равномерно помножается при одинаковых приростах второй, то говорят, что первая величина возрастает *логарифмически.* Размер логарифмического изменения определяется отношением прироста первой величины, соответствующего увеличению второй на единицу, к значению первой величины, какое она имела до того, как приобрела этот прирост.

Попробуем эти соображения приложить в нашей равноугольной спирали. Предположим, что AOB, BOC, COD и т. д. попрежнему те треугольники, при помощи построения которых мы получаем при O ряд равных и очень малых углов (см. стр. 133). Вдоль по OB отмериваем длину OA', равную OA; вдоль по OC длину OB', равную OB; вдоль по OD длину OC'', равную OC, и т. д. Тогда $A'B$, $B'C$, $C'D$ и т. д. представят последовательные приросты луча при последовательных поворотах луча (сначала из положения OA в положение OB, потом из OB в OC и т. д.). Проведем прямые AA', BB', CC' и т. д. Треугольники AOB, BOC, COD и т. п. все имеют одну и ту же форму; равным образом одну и ту же форму имеют и равнобедренные треугольники AOA', BOB', COC'' и т. п. Отсюда следует, что разности соответственных членов этих двух совокупностей, а именно $AA'B$, $BB'C$, $CC'D$ и т. д. должны быть также одной и той же формы, при чем соответственные стороны их пропорциональны. Отсюда следует, что длины $A'B$, $B'C$ CD и т. д. должны быть в том же отношении, как и длины $A'A$, $B'B$, $C'C$ и т. д., или, как, в свою очередь, длины OA, OB, OC и т. д.

Откуда выводим, что

$$\frac{A'B}{OA}=\frac{B'C}{OB}=\frac{C'D}{OC} \text{ и т. д.,}$$

то-есть, что отношение прироста $A'B$ к самой величине OA, получающей прирост, постоянно.

Если углы при O очень малы, прямая AA' на деле совпадает с дугой круга, радиуса OA, имеющего центр в O. Отсюда (см. стр. **113**) получаем, что AA', в конце-концов, будет равно OA умноженному на угол AOA', при чем угол при A' под конец будет равен прямому углу.

Далее, отношение $A'B$ к AA' будет одно и то же для всех малых треугольников $AA'B$, $BB'C$, $CC'D$ и т. д. Для каждого треугольника отношение это, если расматривать эти треугольники с точки зрения равных углов ABA', BCB', CDC' и т. д., является отношением *основания к катету противолежащему*. Но это те углы треугольников, из-за которых спираль получает свое название; пусть один из таких углов, а следовательно, и каждый такой угол, будет равен α. Согласно определению котангенса угла (см. стр. 129), котангенс равен отношению основания к катету противолежащему.

Отсюда:

$$\cot\alpha=\frac{A'B}{AA'}=\frac{A'B}{OA\times\text{угол } AOA'},$$

или

$$\frac{A'B}{OA}=\text{углу } AOA'\times\cot\alpha.$$

Пусть AB означает превращение угла AOA', который, по предположению, чрезвычайно мал; отсюда следует, что *логарифмическое изменение*, то-есть отношение прироста величины, соответствующее углу-*единице*, равно $\cot\alpha$. Таким образом, быстрота логарифмического изменения луча равноугольной, или логарифмической спирали, при повороте его вокруг полюса на равные углы, равна котангенсу углов, равенством которых об'ясняется самое название этой кривой.

Предположим, что OA единица длины, так как $OP = OA \times \lambda^{\theta}$, то при повороте луча OA на угол θ, равный единице, получающийся в результате луч OP равен λ, или, иначе говоря, λ есть результат, получающийся при логарифмическом возрастании единицы (если быстрота логарифмического изменения равна $\cot\alpha$).

Обозначим теперь символом e результат логарифмического возрастания единицы, при быстроте логарифмического изменения, равной единице и при изменении угла на единицу.

В таком случае e имеет некоторое определенное числовое значение. Величина эта, как было найдено при помощи расчета, в изложение которого мы не можем входить здесь, равна приблизительно 2,718. Это значит, что при логарифмическом изменении (по быстроте равной единице) луча-единицы и при повороте на угол, равный единице, его полной прирост (1,718) будет заключаться между семнадцатью и восемнадцатью десятыми первоначальной его длины. Так как e представляет собой результат поворота луча-единицы на угол-единицу и так как луч равномерно умножается при равномерном помножении угла, то e^{γ} представит собой результат поворота угла на γ угловых единиц. До сих пор мы имели дело с таким логарифмическим изменением луча-единицы, быстрота которого была равна единице. Предположим, что теперь быстрота логарифмического изменения единицы равна γ; в этом случае единица будет возрастать в γ раз быстрее, чем при быстроте логарифмического изменения, равной единице; поэтому результат поворота луча-единицы на угол, единицу, при быстроте логарифмического изменения γ, должен быть тем же, как при логарифмическом изменении (быстрота которого $\frac{1}{\gamma}$), происходящем при повороте на угол γ. Дело сводится здесь как бы к логарифмическому возрастанию (со скоростью единицы) единицы на протяжении γ угловых единиц, или e^{γ}.

Отсюда следует, что e^{γ} означает результат логарифмического возрастания (быстрота которого единица) луча-единицы, описывающего угол, равный γ угловым единицам, или, что все равно, результат логарифмического возрастания (при быстроте γ) луча-единицы, описывающего угол-единицу.

Исследуем значение символа e^{γ} при γ, равном некоторой соизмеримой дроби $\frac{s}{t}$, где s и t целые числа. Пусть x будет тем пока еще неизвестным нам результатом, который должен получиться при повороте луча-единицы на угол, равный γ, при быстроте логарифмического возрастания, равной единице. Тогда x^t представит результат поворота луча-единицы на t углов, равных γ, при быстроте логарифмического возрастания, равной единице; но t углов, равных γ, образуют угол, содержащий s единиц; а потому результат должен получиться тот же, как при повороте луча-единицы на угол s (если быстрота логарифмического изменения при этом равна единице). Таким образом, у нас получается, что $x^t = e^s$, то-есть x есть корень степени t из e^s, что может быть нами написано в форме: $x = e^{\frac{s}{t}} = e^{\gamma}$. Таким образом e^{γ} если γ соизмеримая дробь, есть результат логарифмического изменения единицы (быстрота которого равна сама единице, при повороте на угол γ, или иначе—результат логарифмического изменения протекающего с быстротой γ, при повороте на угол-единицу.

Предположим теперь, что можно найти соизмеримую дробь γ, равную $cot\alpha$; тогда результат логарифмического возрастания единицы (протекающего с быстротой возрастания $cot\alpha$), при повороте на угол-единицу, равен e^{γ}. Но мы уже видели (см. стр. 138), что он равен λ. Отсюда

$$\lambda = e^{\gamma}.$$

Далее результат логарифмического возрастания единицы (быстрота возрастания $cot\alpha$), при повороте на угол θ, есть λ^{θ}; или

$$\lambda^{\theta} = e^{\gamma\theta}.$$

Таким образом, мы можем написать, что $OP = OA.\lambda^{\theta} = OA.e^{\gamma\theta}$, или пользуясь нашими прежними символами,

$$r = ae^{\gamma\theta}.$$

Это выражение представляет собой уравнение нашей равноугольной спирали, выраженное при посредстве величины e.

Если возьмем спираль, в которой a единица длины, $cot\alpha$, или γ, равны также единице, то найдем, что

$$r = e^{\theta}.$$

Символ e^{θ} называется *показательной функцией* θ, а θ *натуральным логарифмом* r; символически это обозначается так:

$$\theta = log_e r.$$

Величина e называется *основанием* натуральной системы логарифмов. Наша спираль в этом случае представляет графическую запись таблицы *натуральных логарифмов.*

Возвращаясь к уравнению

$$r = a \,.\, e^{\gamma\theta},$$

предположим, что γ выбрана так, что $e^{\gamma} = 10$; тогда γ представляет собой угол, на который должен быть повернут луч-единица для того, чтобы при логарифмическом возрастании, по быстроте равном единице, он мог возрасти до десяти единиц. Взяв a снова равным единице длины, находим: $r = e^{\gamma\theta} = 10^{\theta}$. θ. В этом случае θ называется логарифмом r при основании 10, что символически передается так:

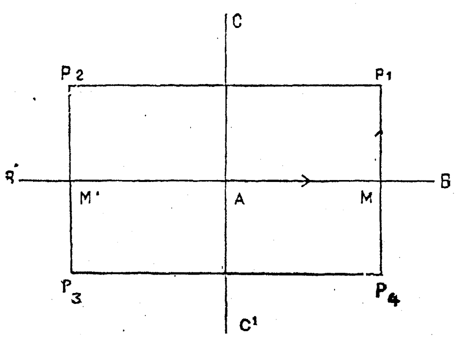
$$\theta = log_{10} r.$$

Спираль, получаемая в данном случае, представляет графически таблицу логарифмов при основании 10; это те логарифмы, которыми обыкновенно пользуются при практических вычислениях.

Натуральные логарифмы впервые были открыты Джоном Непиром, который обнародовал свое изобретение в 1614 г. [1]). Логарифмами при основании 10 пользуются во всех вычислениях, какие приходится производить в точных науках, кроме простейших; их ценность проистекает исключительно из того факта, что сложение и вычитание легче умножения и деления.

§ 11. Декартов метод определения положения.

(γ) Для определения положения точки P в пространстве двух измерений мы можем провести прямую BAB', соединяющую две данные точки A и B и другую прямую CAC', проходящую через A под прямым углом к первой. Эти прямые разделят плоскость на четыре равные части, называемые *квадрантами*. Пусть P_1M прямая, проведенная через P_1 (положение этой точки по отношению к A мы желаем определить), параллельная CA и пересекающая $B'AB$ в M. Мы можем установить следующее правило для перехода из A в P_1: пройди расстояние AM от A по прямой $B'AB$, затем под прямым углом к этой прямой влево пройди путь, равный MP. Но такое расстояние, как AM, может быть пройдено либо вперед по AB, либо назад



Черт. 71.

[1]) John Napier. *Logarithmorum Canonis Descriptio.* Edinburgh, 1614.

по AB'. Точно так же, как и раньше, мы примем теперь, что $+AM$ означает перемещение *вперед* по AB, а $-AM$ означает поступ AM' *назад* по AB' на то же самое расстояние AM. Воспользуемся теперь буквой i для обозначения операции, которую мы представили выше другим символом $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ на стр. 119. В приложении к отрезку-единице это будет означать следующее: пройди вперед в направлении первого поступа, начиная от его конца единицу расстояния, затем поверни около конца первого отрезка это расстояние-единицу на прямой угол по направлению, обратному движению часовой стрелки. Множитель i, помещенный перед поступом (в форме $i.\ MP_1$), мы будем истолковывать следующим образом: пройди от M в направлении AB расстояние, равное длине MP_1, и затем поверни этот отрезок MP_1 вокруг M в сторону, обратную движению часовой стрелки, на прямой угол. Таким образом мы в состоянии выразить символически положение P_1 по отношению к A, то-есть вектор AP_1, при помощи соотношения

$$AP_1 = AM + i.MP_1.$$

Если бы мы имели необходимость пройти не в P_1, но в точку P_4, находящуюся в квадранте BAC', то мы должны были бы, вместо того, чтобы итти от M вперед, пройти *назад* расстояние MP_4, и затем повернуть это расстояние в сторону, обратную движению часовой стрелки, на прямой угол. Отрезок, проходимый обратно, должен быть снабжен знаком —, знаком операции обращения (см. стр. 40), и потому мы будем иметь

$$AP_4 = AM - i.MP_4.$$

Посмотрим далее, как нам переместиться в такую точку, как P_2, находящуюся в квадранте CAB', где P_2 находится на перпендикуляре к AB' на расстоянии P_2M_1 от него. Прежде всего мы должны пройти расстояние AM' назад; этот поступ обозначим $-AM'$; во-вторых, мы должны пройти *вперед* от M' на расстоянии $M'P_2$; так как этот поступ пройден *вперед*, он должен быть сделан по направлению к A; в-третьих, прилагая к этому пути операцию i, мы поворачиваем его вокруг M' в сторону, обратную движению часовой стрелки, на прямой угол и таким образом достигаем P_2. Отсюда

$$AP_2 = AM' + i.M'P_2.$$

Наконец, если мы желаем достигнуть точки P_3, находящейся в квадранте BAC', мы должны пройти назад AM', затем также назад путь $M'P_3$, и, наконец, повернуть этот отрезок в сторону, обратную движению часовой стрелки на прямой угол. Это может быть выражено так:

$$AP_3 = -AM' - i.\ M'P_2.$$

Предположим теперь, что P_1, P_2, P_3, P_4 четыре вершины четырехугольной фигуры, центр которой находится в A, стороны же параллельны BAB' и CAC'. Пусть число единиц, заключающихся в AM, равно x; число единиц, заключающихся в MP_1, равно y, тогда четыре вектора, определяющих положение точек P по отношению к A, могут быть представлены нами следующим образом:

$$AP_1 = x + iy \qquad AP_2 = -x + iy$$
$$AP_3 = -x - iy \qquad AP_4 = x - iy$$

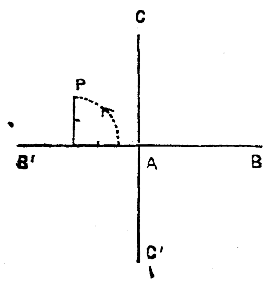
Здесь x и y только числа, но когда эти числа мы представляем отрезками на какой-либо линии, числа y необходимо откладывать на такой прямой, которая пересекалась бы под прямым углом с некоторой другой прямой, на которой откладываются числа x. Таким образом с той минуты, как мы начинаем изображать наши числа x и y длинами, мы получаем способ для определения положения.

Величинами x и y можно пользоваться для определения положения точки, если предположить, что при каждой из них находится соответственный знак. Тогда у нас получится некоторое общее правило, состоящее в том, что мы должны пройти вперед по AB от A расстояние x, затем от конца x вперед расстояние, равное y; повернем теперь этот отрезок y около конца x в сторону, обратную движению часовой стрелки, на прямой угол, тогда конец y будет точкой, определяемой величинами x и y

Если x или y отрицательны, то соответствующее *вперед* надо будет прочесть так: пройди вперед отрицательную величину, то-есть пройди назад. Таким образом:

P_1, или положен. в квадранте . . .	BAC, опред. посред. . .	x и y,
P_2	CAB'	$-x$, y,
P_3	$B'AC'$	$-x$, $-y$,
P_4	$C'AB$	x, $-y$.

Величины x и y называются *декартовыми координатами* точки P, в виду того, что этот способ определения положения точки впервые был применен Декартом. BAB' и CAC' называются соответственно *осями* x-ов и y-ов; точка A называется *началом координат*. Пусть, например, декартовы координаты точки равны $(-3{,}2)$. Как достигнуть этой точки из начала A? Если такой точкой будет P, то $AP = -3 + i.2$. Отсюда следует, что мы должны пройти назад 3 единицы; из этой точки пройти вперед 2 единицы и этот последний поступ повернуть вокруг конца отрезка 3 в сторону, обратную движению часовой стрелки, на прямой угол; тогда мы придем в искомую точку.

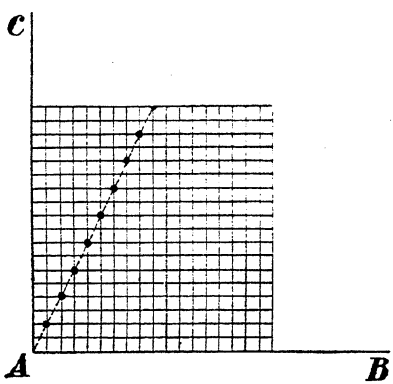


Черт. 72.

Если точка P определена при помощи ее декартовых координат x и y, то мы можем найти совокупность идущих одна за другой точек P, для каждой из которых откладываемый нами отрезок y будет находиться в одном и том же неизменном заранее заданном соотношении с отрезком x.

Такая последовательность точек P, полученная путем сообщения величине x всевозможных значений, образует прямую или кривую; соотношение между x и y называется ее *уравнением в декартовых координатах.*

Как пример такого соотношения предположим тот случай, когда для каждого отрезка x поступу y мы сообщаем величину двойную по сравнению с отрезком x. Тогда наше соотношение будет иметь форму $x=2y$, и наше указание о способе достижения какой-либо точки, принадлежащей к рассматриваемой совокупности точек, представится в форме $x+i.\ 2x$. Предположим, что квадрант BAC разделен на известное число маленьких квадратов прямыми, параллельными осям, при чем стороны этих квадратов равны единице длины. Если мы последовательно будем брать $x=$ $=1$, 2, 3 и т. д., мы можем легко отметить наши поступы. Таким образом, берем 1 вдоль AB и затем 2 влево от AB; 2 вдоль AB и 4 влево от нее; 3 вдоль AB и 6 влево от AB; 4 вдоль AB и 8 влево; 5 вдоль AB и 10 влево и т. д. Очевидно (см. стр. 88), что все наши точки лежат на прямой, проходящей через A, сколько бы отрезков вдоль AB мы ни брали.



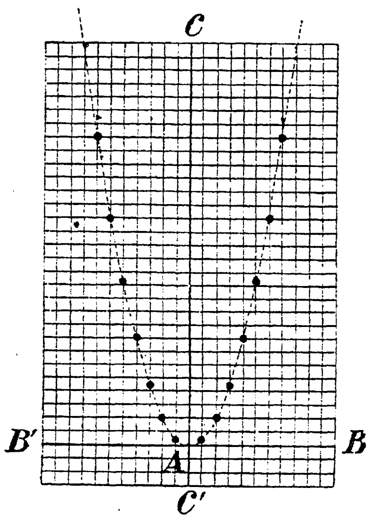
Черт. 73.

Возьмем другой пример. Предположим, что в площади прямоугольника, сторонами которого служат y и длина, равная 2 единицам, содержится столько квадратных единиц, сколько и в x^2. Наше соотношение в данном случае может быть выражено в форме $2y=x^2$; мы имеем следующую серию векторов, идущих от A к точкам, о которых идет речь:

$$1+i.\frac{1}{2} \qquad 2+i.2 \qquad 3+i.\frac{9}{2}$$

$$4+i.8 \qquad 5+i.\frac{25}{2} \qquad 6+i.18 \text{ и т. д.}$$

При помощи сетки наших квадратиков мы можем легко проследить вышеуказанные операции; мы находим таким образом совокупность точек, подобную той, какую мы видим на чертеже 74 в квадранте BAC. Если мы будем брать x равным отрицательным величинам —1, —2, —3, —4, —5, —6 и т. д., мы найдем точно такие же величины для y, как и при положительных x, так как мы уже видели, что $(-a)\times(-a)=a^2=(+a)\times(+a)$. Эти отрицательные значения для x дают нам совокупность точек, подобную той, которая находится на нашем чертеже в квадранте $B'AC'$ (см. черт. 74). Среди точек этой совокупности нельзя найти таких, которые лежали бы ниже BAB', потому что как положительные, так и отрицательные значения x по возвышении в квадрат дают положительную величину для поступа y; таким образом, ни один из возможных поступов x не приводит к отрицательному поступу y. Совокупность точек, полученных таким образом, лежит, как было найдено, на кривой, являющейся одной из тех теней окружности, которые мы назвали параболами.



Черт. 74.

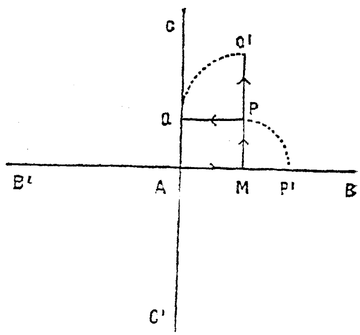
Таким образом, мы можем сказать, что $2y = x^2$ есть уравнение параболы.

Этот метод нанесения кривых на бумагу представляет большую ценность, и им широко пользуются во многих отраслях физических исследований. Если, например, разности последовательных отрезков x обозначают последовательные промежутки времени, а длины y—соответствующие высоты столба ртути в барометре по сравнению с некоторым выбранным средним положением, то совокупность полученных точек даст, при достаточно малых промежутках времени, понятие о форме кривой. Эта кривая является графическим представлением изменений барометра за весь тот период, в течение которого его высоты заносились на бумагу. Барометрические кривые за истекший день теперь помещаются в различных утренних газетах. Высоты, соответствующие каждому моменту времени в этом случае регистрируются обыкновенно автоматически при помощи простого фотографического аппарата.

Изображение кривых по их уравнениям в декартовых координатах, обыкновенно называемое *построением кривых*, образует чрезвычайно интересный отдел чистой математики. Можно показать, что всякое соотношение между x и y, не содержащее степеней x и y выше второй, есть уравнение одной из форм, принимаемых тенями круга.

§ 12. О комплексных (составных) числах.

Возвратимся теперь к нашему символу операции i и вникнем несколько глубже в его смысл. Пусть точку P попрежнему представляет $AM + i.MP$; таким образом этот результат мы можем прочесть следующим образом: пройди вдоль AB от A до M и далее по той же линии от M до P' (где $MP' = MP$); наконец, поверни MP' вокруг M в сторону, обратную движению часовой стрелки, на прямой угол. Возьмем теперь MQ' равным AP', то да $AM + i.MQ'$ будет означать: пройди A до M, затем из M по перпендикуляру к AM влево от AB на расстояние MQ', равное AP'. Но так как $MQ' = AP' = AM + MP = MP + PQ'$, то PQ' должно быть равным AM и мы можем прочесть нашу операцию так:



Черт. 75.

$$AM + i.\ (MP + PQ'),$$

что обозначает два последовательных поступа под прямыми углами к AM, а именно MP и за ним поступ PQ'. Предположим теперь, что мы пожелали повернуть этот последний поступ на прямой угол в сторону, обратную движению часовой стрелки; мы должны будем для этой цели поместить перед ним символ i, и $MP + iPQ'$ будут означать переход MP, за которым следует под прямым углом к нему переход PQ', совершаемый влево. PQ' равно AM, отсюда в результате эта операция должна привести нас в Q, точку на AC, достигнуть которой мы могли бы при помощи простого действия $O + i\,AQ$. Таким образом мы можем положить, что

$$O + iAQ = AM + i(MP + iPQ) = AM + iMP + iiPQ,$$

так как величины AQ, AM, MP и PQ имеют только числовые значения и так как $AQ = MP$, $AM = PQ$, то у нас получится, что

$$O = AM + i\,.\,i\,.\,AM$$
$$-AM = i\,.\,i\,.\,AM.$$

Таким образом характер операции i таков, что, будучи повторена дважды, она является эквивалентной простому обращению; символически этот результат мы можем выразить в виде

$$-1 = i^2,$$

словами же это может быть прочитано следующим образом: поверни отрезок в сторону, обратную движению часовой стрелки, на прямой угол, а затем поверни его в ту же сторону еще на прямой угол, и тогда получится тот же результат, как если бы мы обратили направление первоначального отрезка. Если величина x такова, что по умножении ее самое на себя получается произведение a, то x, как мы видели, называется корнем квадратным из a и обозначается так: $\sqrt{a}$.

Отсюда, имея $i^2 = -1$, можем написать, что $i = \sqrt{-1}$.

Этот символ совершенно непонятен, поскольку будет итти речь о его *величине*; он не может представлять собою какой бы то ни было мыслимой величины, так как квадраты всех мыслимых величин— величины положительные. В виду этого соображения $\sqrt{-1}$ иногда называется *мнимой величиной.* Рассматриваемый, однако, как *символ известной операции*, $\sqrt{-1}$ имеет совершенно ясное и реальное значение: в нем заключается указание пройти вперед единицу длины и затем повернуть эту единицу в сторону, обратную движению часовой стрелки, на прямой угол.

Всякое выражение вида $x + \sqrt{-1}\ y$ называется *комплексным числом.*

Пусть P—точка, определяемая вектором $AP = AM + \sqrt{-1}MP$, пусть r, x, y числовые значения длин AP, AM, MP. Из прямоугольного треугольника PAM следует, что $r^2 = x^2 + y^2$. Величина r называется в этом случае *модулем* комплексного числа $x + \sqrt{-1}\ y$.

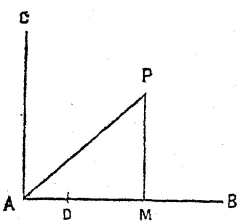
Пусть далее в угле MAP содержится θ угловых единиц, тогда

$$\sin\theta = \frac{PM}{AP} = \frac{y}{r};\quad \cos\theta = \frac{AM}{AP} = \frac{x}{r};$$

или

$$y = r\sin\theta;\ x = r\cos\theta.$$

Угол θ называется аргументом комплексного числа. Здесь r и θ— полярные координаты точки P, и мы таким образом имеем возможность связать полярные координаты с декартовыми; первые из названных координат являются соответственно модулем и аргументом комплексного числа и могут быть получены по данным декартовым координатам. Так как r имеет только числовое значение, то мы можем написать комплексное число $x + \sqrt{-1}\ y$ в форме $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$, то-есть как произведение этого модуля и множителя $\cos\theta + \sqrt{-1}\ \theta$, который зависит только от своего аргумента θ. Отсюда мы можем дать следующее толкование происхождению вектора $AP = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$: поверни единицу длины, взятую на прямой AB, на угол θ и затем растяни ее



Черт. 76.

в отношение $r:1$. Последняя часть операции обозначается модулем r, первая множителем $\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$. Таким образом, если AD единица длины, лежащая на AB, то мы можем прочесть вектор AP так:

$$AP=r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta).AD,$$

и наше комплексное число мы будем рассматривать как символ, означающий совокупность двух операций, совершаемых над отрезком-единицей AD.

Итак, отправляясь от идеи о комплексном числе, как о числе, определяющем положение точки, мы пришли к новому действию, обозначаемому символом $\cos+\sqrt{-1}\sin\theta$. Это, очевидно, обобщенная форма нашего старого символа $\sqrt{-1}$. Множитель $\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$ в приложении к какому бы то ни было поступу заставляет нас повернуть этот поступ на угол θ. Мы увидим, что введение этого нового понятия влечет за собою важные результаты.

§ 13. Об операции, которая состоит в повороте поступа на данный угол.

Предположим, что мы дважды приложили множитель $(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$ к поступу-единице. Тогда символическим выражением этой операции будет произведение $(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$, или $(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^2$.

Но поворот поступа на угол θ, сопровождающийся вторым поворотом на угол θ, есть, очевидно, та же самая операция, что и поворот этого поступа одним вращением на угол 2θ. Благодаря этому, мы можем установить равнозначительность этих операций, выражаемую следующим уравнением:

$$(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^2=\cos 2\theta+\sqrt{-1}\sin 2\theta.$$

Подобным образом результат поворота поступа при помощи n операций последовательно на n углов, равных θ, должен быть тождествен с результатом одного обращения поступа на угол, равный n раз взятому θ, что мы можем написать так:

$$(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta.$$

Эта важная тождественность операций впервые в вышепоказанной символической форме была выражена Де-Муавром и обыкновенно называется по его имени теоремой Де-Муавра.

Теперь мы имеем возможность рассмотреть операцию, при помощи которой AP может быть преобразован в другой вектор AQ. Мы должны, очевидно, поворачивать AP вокруг A против движения часовой стрелки до тех пор, пока этот отрезок не совпадет по положению с AQ. Тогда P упадет в P' и $AP'=AP$. Теперь мы должны растянуть AP' до величины AQ; это будет процесс умножения AP' на некоторую величину ρ, равную отношению AQ к AP'.

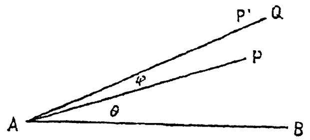
Выражая сказанное символически (если φ угол PAQ), имеем:

$$(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)\,AP=AP'$$
$$\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)\,AP=\rho\,AP'=AQ.$$

Это последнее уравнение мы можем истолковывать различным образом.

I) $\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$ может быть комплексным числом, для которого ρ служит модулем, а φ—аргументом. Отсюда мы можем сказать, что умножить вектор на комплексное число, значит повернуть этот вектор на угол, равный аргументу, и изменить его длину путем растяжения, указываемого модулем.

II) Мы можем рассматривать вектор AP, в свою очередь, как некоторое комплексное число $x+\sqrt{-1}y$, или (если r скалярное значение AP, а θ угол PAB) мы можем положить, что $AP=r\,(\cos\theta+$ $+\sqrt{-1}\sin\theta)$. Подобным образом $A\theta$ будет также комплексным числом; его скалярная величина ($=\rho$, $AP'=\rho r$) будет его модулем, а угол $BAQ=\theta+\varphi$ его аргументом. Мы имеем в таком случае следующее тожество:



Черт. 77.

$$\rho\,(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)\,.\,r\,(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)=$$
$$=\rho r\,(\cos\overline{\theta+\varphi}+\sqrt{-1}\sin\overline{\theta+\varphi}).$$

Тожество это может быть читаемо двояко:

Во-первых: произведение двух комплексных чисел есть также комплексное число; модулем его служит произведение модулей, а аргументом—сумма аргументов.

Во вторых: если повернем отрезок-единицу на угол θ, сообщим ему растяжение r, повернем затем полученный результат на угол φ и сообщим ему растяжение ρ, то результат всего этого будет тот же, как если бы мы повернули отрезок-единицу на угол $\theta+\varphi$ и сообщили ему растяжение, равное ρr.

Отсюда мы видим, что каждое соотношение между комплексными числами может быть рассматриваемо либо как алгебраический факт, связанный с этими числами, либо как теорема, касающаяся поворотов и растяжений, приложенных к поступам-единицам.

III) Мы можем рассмотреть, какой ответ дает нам приведенное выше тожество на следующий вопрос: каково будет отношение двух имеющих определенное *направление* отрезков AQ и AP. Или, пользуясь обозначением, приложенным на стр. 45, спросим, каково значение символа $\frac{AQ|}{|AP}$? Отрезок, подобный AP (или AQ), имеющий величину, направление и знак, как мы сказали, называется вектором. Поэтому спросим, что представляет собой частное двух векторов, или, иначе, при посредстве какой операции можно один вектор превратить в другой?

Ответ получится следующий: такое частное будет операцией, представляющей собою произведение поворота и растяжения. Но растяжение есть скалярная величина,—это числовое отношение, которым скалярная величина AP связана со скалярной величиной AQ. Растяжение таким образом есть операция скалярная. Поворот изменяет направление AP в направление AQ, эта операция выполняется, очевидно, вращением AP вокруг оси, перпендикулярной к плоскости бумаги, в которой лежат как AP так и AQ. Таким образом, вторая часть операции, преобразующей AP в AQ, означает поворот около известной оси (в сторону, обратную движению часовой стрелки на определенный угол). Размер такого поворота может быть показан отрезком, отложенным вдоль по этой оси. Так, например, если поворот равнялся 6 угловым единицам, мы можем для указания размера этого поворота отложить на оси 6 единиц. Мы можем также условиться откладывать эту длину вдоль по определенному направлению этой оси (по сю сторону от циферблата часов), если вращение совершалось в сторону, обратную движению часовой стрелки, и в обратном направлении (по другую сторону от циферблата часов), если вращение совершалось согласно движению часовой стрелки. Таким образом мы видим, что наша операция вращения может быть обозначаема линией, или поступом, имеющими величину, направление и знак, или, другими словами, вектором. Теперь мы в состоянии понять характер отношения двух векторов: это—операция, состоящая из произведения скаляра и вектора. Такое произведение было названо сэром Вильямом Гамильтоном *кватернионом* [1]) и легло в основу чрезвычайно мощного исчисления.

Итак, кватернион—это операция, прежде всего преобразующая один вектор в другой. Достигается это помощью поворота и растяжения [2]). Читатель поймет теперь, каким образом, имея на плоско-

---

[1]) См. прим. в конце книги.

[2]) Термин «растяжение» должно рассматривать, как заключающий в себе и сжатие или, иначе говоря, растяжение, обозначаемое скалярной величиной ρ, меньшей, нежели единица.

стном протяжении три точки, можно сделать положение третьей точки относительно первой тожественным с положением второй точки относительно первой при помощи некоторого поворота и растяжения отрезка, соединяющего первую точку с третьей, то-есть с помощью кватерниона.

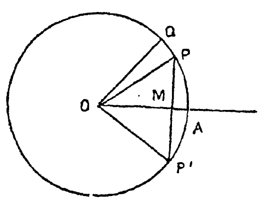
§ 14. Соотношение между поворотом и логарифмическим возрастанием отрезка-единицы.

Возьмем круг радиуса единицы и попытаемся найти, как возрастает его радиус при повороте на угол, равный единице. До сих пор мы рассматривали возрастание только в направлении длины, так что тут можно было бы сделать предположение, что радиус круга при вращении вокруг центра вовсе не „возрастает". Но наш способ сложения векторов указывает сразу на очевидную возможность расширения нашего понятия о возрастании. Пусть AP при вращении вокруг A на угол PAQ делается равным AQ; отложим теперь на AQ расстояние $AP' = AP$; $P'Q$ будет тогда *скалярным* приращением AP, т.-е. приращением AP в направлении длины. Но если смотреть на AP, как на вектор (стр. 120), то

Черт. 78.

$$AQ = AP + PQ,$$

т.-е. для преобразования AP в AQ должно прибавить к AP *имеющий направление* отрезок PQ; PQ может быть в силу этого названо имеющим направление приращением AP. Если мы соединим P с P', мы найдем, что PQ равно сумме PP' и $P'Q$. Если угол PAP' брать очень малым, то PP' будет под конец перпендикулярно к AP, и эту часть приращения PQ мы можем представить в виде $\sqrt{-1}.\ PP'$. Итак, мы пришли к способу представления приращения перпендикулярного к вращающейся линии, посредством скалярного числа, умноженного на символ $\sqrt{-1}$.



Черт. 79.

Мы можем теперь рассмотреть наш случай, а именно круг радиуса-единицы. Пусть OP—радиус, положение которого определяется поворотом на угол θ по отношению к неподвижному радиусу OA. Пусть OQ положение радиуса настолько смежное с OP, что угол QOP очень мал. Тогда PQ будет малой дугой, заметно совпадающей с прямой линией PQ, а прямая PQ всегда и во всех случаях будет пересекать OP под прямым углом. Отсюда для получения OQ, надо провести под прямым углом к OP отрезок PQ. Такой поступ мы представили в виде $\sqrt{-1}PQ$. Так как радиус круга—единица, дуга QP, равная произведению радиуса на угол QOP (см. стр 112), должна равняться числовой величине угла QOP. Приращение OP задается таким образом в форме $\sqrt{-1} \times QOP$. Так как OP при обращении вокруг O сохраняет длину неизменной, то при повороте на равные углы этот отрезок равномерно умножается (то-есть умножается на множитель, равный единице). Но такое возрастание удовлетворяет нашему определению логарифмического возрастания (см. стр. 136). Каков же будет в этом случае размер приращения, отнесенный к углу-единице.

Размер приращения должен равняться $\frac{PQ}{OP}$, разделенному на отношение угла QOP к углу-единице $= \frac{PQ}{OP \times \text{угол } QOP} = \sqrt{-1}$, так как OP равно единице. Таким образом быстрота логарифмического приращения OP, отнесенная к углу-единице, есть $\sqrt{-1}$; другими словами, результат поворота OP на угол-единицу может быть символически представлен в виде $e^{\sqrt{-1}}$. Отсюда результат поворота на угол θ должен быть равен $e^{\sqrt{-1}\theta}$. Мы можем тогда написать, что

$$OP = OA \,.\, e^{\sqrt{-1}\theta}.$$

Опустим на OA перпендикуляр PM и продолжим его до пересечения с кругом в точке P', тогда, в силу симметрии, $MP = MP'$, и мы получим

$$OP = OM + \sqrt{-1}\,MP$$
$$OP' = OM - \sqrt{-1}\,MP'.$$

Но так как OP и OP' по величине равны единице,

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = OM; \ \sin\theta = \frac{PM}{OP} = PM,$$

в то же время угол $P'OM$ равен углу MOP, но, согласно нашему условию об измерении углов, он будет углом противоположного смысла и потому равен—θ. Таким образом мы можем написать

$$OP' = OA \,.\, -e^{\sqrt{-1}\theta}.$$

Подставляя эти значения, получаем в символической форме следующие результаты:

$$\left.\begin{aligned} e^{\sqrt{-1}\theta} &= \cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta \\ e^{\sqrt{-1}\theta} &= \cos\theta - \sqrt{-1}\,\sin\theta \end{aligned}\right\} \text{I.}$$

Далее

$$OP - OP' = 2\sqrt{-1}PM$$
$$OP + OP' = 2OM,$$

то-есть

$$\left.\begin{array}{l} e^{\sqrt{-1}\theta} - e^{-\sqrt{-1}\theta} = 2\sqrt{-1}\ \sin\theta \\ e^{\sqrt{-1}\theta} + e^{-\sqrt{-1}\theta} = 2\cos\theta \end{array}\right\} \text{II.}$$

Эти значения для $\cos\theta$ и $\sin\theta$, выраженные через степени e, были открыты впервые Эйлером. Они лишены смысла, будучи взяты в форме (I), поскольку $\cos\theta$ и $\sin\theta$ истолковываются лишь как числовые отношения, но они имеют совершенно ясное и определенное значение, когда мы рассматриваем обе части уравнения (I), как символы известных операций. Таким образом, операция $\cos\theta + \sqrt{-1}\ \sin\theta$, будучи приложена к отрезку-единице, указывает нам на то, что надо этот отрезок без изменения его длины повернуть на уголь θ; с другой стороны, $e^{\sqrt{-1}\theta}$, будучи приложено к тому же поступу-единице, обусловливает поворот его на угол θ и логарифмическое приращение его (быстротой единица) в направлении к нему *перпендикулярном.* Оба эти процесса приводят к одному и тому же результату.

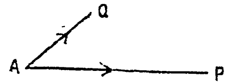
§ 15. Об умножении векторов.

Мы рассмотрели, как векторы складываются, и доказали, что порядок сложения на результат влияния не оказывает. Мы также исследовали операцию, обозначаемую отношением двух векторов. Читатель, конечно, спросит: нельзя ли придать какой-либо смысл произведению векторов?

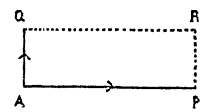
Если рассматривать оба вектора как комплексные числа или как обозначения некоторых операций, то произведение их, как мы показали (см. стр. 148), истолковывается, как новое комплексное число или как равнодействующая операция. Мы дали истолкование произведению двух векторов и в том случае, когда один из них означает операцию, а другой—отрезок, определяющий положение. Произведение в этом случае показывает, что надо повернуть вектор на известный угол и затем растянуть его в известном отношении. Но ни один из этих случаев не дает нам указаний, как понимать произведение двух векторов, определяющих положение.

Пусть AP и AQ—два таких вектора. Спрашивается: каков смысл произведения $AP \,.\, AQ$? Если бы AP и AQ были только скалярными величинами, то и произведение их было бы чисто-скалярным и для нас не составило бы никакого труда истолковать результат $AP \,.\, AQ$, как некоторую новую скалярную величину. Но когда мы рассматриваем поступы AP и AQ, как обладающие не только величиной, но и *направлением*, смысл их произведения далеко не очевиден.

Если бы вектор AQ составлял прямой угол с AP (см. черт. 81), то мы, понятно, могли бы истолковать произведение $AP.AQ$, как площадь прямоугольника, построенного на AP, и AQ, как площадь фигуры $QAPR$. Посмотрим теперь, как такая площадь могла получиться.



Черт. 80.



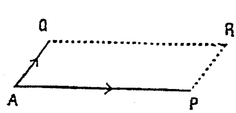
Черт. 81.

Если бы стали перемещать вектор AQ параллельно ему самому так, чтобы его конец оставался все время на AP, то за то время, как основание его проходило бы по AP, он сам описал бы прямоугольник $QAPR$. Итак, если AP и AQ образуют прямой угол, их произведение мы можем истолковать следующим образом:

Произведение $AP.AQ$ указывает нам, что мы должны передвигать вектор AQ параллельно ему самому так, чтобы его конец перемещался по вектору AP; площадь, описываемая AQ при его передвижении, и есть значение произведения $AP.AQ$.

Необходимо отметить, что хотя это толкование исходит из того случая, когда угол QAP прямой, оно совершенно не зависит от того, каков этот угол. Если QAP не прямой угол, то площадь, описываемая AQ, согласно указанному выше правилу, будет параллелограммом, построенным на AP и AQ, как на сторонах. Таким образом, истолкование, открытое нами, для произведения $AP.AQ$ понятно и имеет смысл, каков бы ни был угол QAP.

Но тут есть одна трудность, которой мы еще не разрешили. Дело в том, что площадь есть величина, имеющая *направление* (см. стр. 106), и направление это зависить от того, как мы идем по периметру. Таким образом, площадь $QAPR$ будет положительна, если мы будем обходить ее, двигаясь все время в сторону, обратную движению часовой стрелки, или от A к P, то-есть будем ли мы перемещаться в направлении, указанном первым вектором сомножителем, или в направлении второго, или движущегося вектора. Таким образом, произведение $AP.AQ$ будет площадью $QAPR$, взятой со знаком, указываемым поступом AP. Произведение $AQ.AP$ получится, если мы заставим вектор AP перемещаться параллельно самому себе так, чтобы конец его передвигался вдоль AQ; поэтому такое произведение будет также площадью параллелограмма, построенного на AP и AQ, но взятой со знаком, указываемым вектором AQ, или иначе это будет площадь $PAQR$.



Черт. 82.

Согласно нашему условию о знаках площадей,

$$PAQR = -QAPR$$
$$AQ\,.\,AP = -AP\,.\,AQ.$$

Отсюда мы видим, что данное выше истолкование произведения двух векторов не подчиняется перестановительному закону (см. стр. 45).

Если мы предположим, что угол QAP обращается в нуль и вектор AQ становится тождественным с вектором AP, площадь построенного на них параллелограмма, очевидно, также обратится в нуль. Таким образом, если вектор мы умножаем на него самого, то произведение равно нулю, другими словами $AP\,.\,AP = AP^2 = O$.

Если взять ряд векторов α, β, γ, δ и т. д., то получатся следующие соотношения между ними:

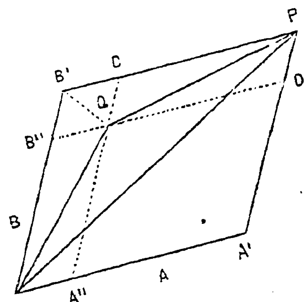
$$\alpha^2 = 0,\ \beta^2 = 0,\ \gamma^2 = 0,\ \delta^2 = 0 \text{ и т. д.}$$
$$\alpha\beta = -\beta\alpha,\ \alpha\gamma = -\gamma\alpha,\ \beta\gamma = -\gamma\beta,$$
$$\delta\gamma = -\gamma\delta \text{ и т. д.}$$

Величины, по отношению к которым имеют место эти зависимости, впервые были применены Грассманом и были названы им *экстензивными единицами.*

Читатель видит сразу, что для экстензивных единиц существует своя собственная алгебра. По отношению к ним теряет силу закон перестановительный или, лучше сказать, заменяется другим законом, согласно которому знак произведения изменяется на обратный при перестановке сомножителей. Рассмотрение их приведет читателя к убеждению, что правила арифметики, которые, быть-может, он привык считать необходимо верными для всех форм символических величин, имеют сравнительно ограниченное поле приложения: они приложимы к одним лишь скалярным величинам. Таким образом, приходится рассматривать эти законы только как допущения, и даже совсем отказываться от них по мере того, как мы шаг за шагом расширяем значение применяемых нами символов.

Хотя $2 \times 2 = 0$ и $2 \times 3 = -3 \times 2$ представляются совершенной нелепостью, когда 2 и 3 рассматриваются только как числа, но эти равенства становятся вполне согласными с требованиями здравого смысла, когда 2 и 3 будут рассматриваться как векторы на плоскости.

Возьмем две экстензивные единицы α и β и истолкуем величину $a\alpha + b\beta$, где a и b только скалярные величины. Если OA вектор α, то $a\alpha$ показывает, что нам необходимо растянуть OA до величины OA' в отношении 1 к a. К этому-то OA' мы должны прибавить вектор OB', получившийся от растяжения b, сообщенного OB. Если $A'P = OB'$, то вектор OP представляет величину $a\alpha + b\beta$, которая называется *экстензивным числом.* Пусть OQ представляет второе экстензивное число $a'\alpha+b'\beta$, образованное путем сложения результатов, получившихся от сообщения экстензивным единицам α и β соответственно двух других растяжений a' и b'. Точно таким же путем мы можем образовать, складывая результаты, получающиеся от растяжения трех экстензивных единиц (α, β, γ) экстензивные числа с тремя членами (формы $a\alpha+b\beta+c\gamma$) и так далее. Если мы возьмем произведение стольких экстензивных чисел, сколько экстензивных единиц было введено для образования этих чисел, то мы получим величину, называемую *детерминантом* или *определителем*, играющую большую роль в современной теории величин. Мы ограничимся здесь рассмотрением определителя, образованного при помощи двух экстензивных единиц. Такой определитель будет представлен в виде произведения $OP\,.\,OQ$, которое, согласно нашему условию относительно умножения векторов, равняется площади параллелограмма, построенного на OP и OQ, как на сторонах, или, иначе говоря (см. стр. 99), удвоенному треугольнику QOP. Проводим через Q прямую CQA'', параллельную OB, и DQB'', параллельную OA; тогда $OA''=$ $=a'\alpha$, а $OB''=b'\beta$. Соединим B' и Q, тогда удвоенный треугольник $B'QP$ равняется площади параллелограмма $B''P$. Прибавляя к этим двум площадям площадь параллелограмма $A'B''$, получим, что сумма параллелограмма $A'B''$ и удвоенного треугольника $B'QP$ равна параллелограмму $B'A'$, то-есть удвоенному треугольнику $B'OP$. Но треугольник $B'OP$ равен сумме трех треугольников OQB', $B'QP$ и OPQ. Отсюда следует, что параллелограмм $A'B''$ должен равняться сумме удвоенного треугольника OPQ и удвоенного треугольника OQB'. Но последний треугольник, будучи удвоен, дает в результате площадь $B'A''$. Отсюда разность между параллелограммами $A'B''$ и $B'A''$ равна удвоенному OPQ. Параллелограмм $A'B''$ получился из параллелограмма AB путем сообщения последнему двух растяжений a и b', параллельных его сторонам. Поэтому площадь его равна ab' раз взятой площади AB. Подобным образом $B'A''$ равняется ba' раз взятой площади AB. Но сама площадь AB равна $\alpha\beta$. Отсюда мы видим, что тожество



Черт. 83.

$$OP\,.\,OQ=A'B''-B'A''$$

может быть прочтено в такой форме:

$$(a\alpha+b\beta)\,(a'\alpha+b'\beta)=(ab'-ba')\,\alpha\beta.$$

Иначе говоря, определитель равен параллелограмму, построенному на экстензивных единицах, увеличенному в отношении 1 к $ab'-ba'$.

Определитель, очевидно, обращается в нуль при $ab'—ba' = 0$, или при $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. В этом случае P и Q, в силу свойства подобных треугольников, лежат на одной и той же прямой, проходящей через O, поэтому, как мы должны были ожидать, определитель $OP \,.\, OQ$ равен нулю.

Читатель не встретит никаких трудностей при открытии сходных свойств для детерминанта, образованного при помощи трех экстензивных единиц. В этом случае мы будем иметь геометрическое соотношение между известными об'емами, которые могут быть получены путем растяжений, совершенно так, как это указано на стр. 110 [1]).

Мы пришли в этой части книги к законному истолкованию произведения двух имеющих направления поступов, или векторов. Мы нашли, что их произведение есть площадь, или, согласно сделанному нами раньше условию, отрезок (см. стр. 106), имеющий также направление, то-есть вектор, при чем его направление перпендикулярно к плоскости, в которой лежат оба вектора, являющиеся сомножителями.

§ 16. Другое истолкование произведения двух векторов.

Читатель может вспомнить, что результаты предыдущего параграфа получены лишь при помощи некоторого *условия*, а именно, мы условились; что площадь известного параллелограмма представляет произведение векторов. Лишь до тех пор, пока мы держимся этого условия, наши выводы относительно умножения векторов будут правильны. Мы могли бы сделать какое-нибудь новое допущение и, тогда пришли бы к новому результату. Было бы очень поучительно проследить результаты принятия нового допущения, если бы это позволило запечатлеть в уме читателя тот факт, что основные аксиомы любой отрасли точного знания опираются не столько на всеобщие истины, сколько на допущения.

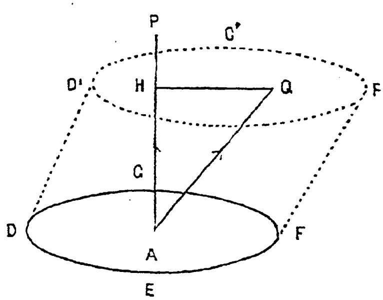
Предположим, что при истолковании произведения $AP \,.\, AQ$ (черт. 84) мы рассматриваем AP, как некоторый вектор, представляющий собой площадь $DEFG$. Площадь эта будет перпендикулярна к направлению AP, и мы можем принять допущение, что произведение $AP \,.\, AQ$ означает об'ем, описанный отрезком AQ, движущимся параллельно самому себе таким образом, что конец его занимает всевозможные положения на плоскости $DEFG$. Этот об'ем является частью наклонного цилиндра с основанием $DEFG$, пересеченного

---

[1]) Я должен поблагодарить своего друга Дж. Роз-Иннса за совет ввести вышеприведенные замечания, касающиеся определителей. Я должен, быть-может, прибавить, что при таком истолковании экстензивных единиц, при котором мы понимаем их, как точки (как это делал Грассман), а экстензивное число, как их нагруженный центроид, определитель второго порядка геометрически представляется длиной; поэтому мы получаем, вместо определителя *четвертого* порядка, геометрическое толкование его в виде некоторого об'ема.

плоскостью, параллельною основанию, проведенною через Q. Мы уже видели (см. стр. 111), что об'ем такого цилиндра равняется произведению его основания на его высоту, то-есть на расстояние между двумя плоскостями, отсчитанное по перпендикуляру AH. Пусть r и ρ скалярные величины AP и AQ, а $\theta =$ углу PAQ. Тогда $AH = \rho \cos \theta$, об'ем же $= AP \cdot AQ = r\rho \cos \theta$, так как r представляет собой число единиц площади, заключающихся в $DEFG$. Так как об'ем представляет собой чисто числовую величину, имеющую только величину, но не направление, мы находим, что при этом новом допущении произведение двух векторов есть чисто *скалярная* величина, иначе говоря, наше новое допущение приводит нас к результату, совершенно отличному от старого.

Далее, так как r и ρ только числа, $r\rho = \rho r$; поэтому $AP \cdot AQ = r\rho \cos \theta = \rho r \cos \theta = AQ \cdot AP$, если AQ рассматривать как вектор, представляющий площадь, содержащую ρ единиц площади. Таким образом, в этом случае произведение векторов следует закону переместительному, что, в свою очередь, представляет отличие по сравнению с предшествовавшим результатом. Мы можем, значит, рассматривать произведение двух векторов либо как вектор и как величину, не подчиняющуюся закону переместительности, либо, как *скаляр*, и как величину, следующую закону переместительности. Мы в праве по усмотрению принять то или другое допущение, если только мы последовательно проведем его вплоть до наших заключительных исследований.



Черт. 84.

Метод замены одного истолкования другим, пример которого мы видели при рассмотрении произведения двух векторов, оказывается чрезвычайно плодотворным в области точных наук.

Каждое такое новое истолкование может привести нас к необходимости внести изменения в наши основные законы, и далее, исходя из этих измененных основных законов, мы можем построить новое исчисление (алгебраическое или геометрическое в зависимости от данного случая). Выводы, к которым приведет новое исчисление, будут по необходимости обязательны лишь для тех величин, для которых мы формулировали наши основные законы. Таким образом, законы, которые были формулированы для чистого числа и которые, подобно постулатам Евклида в применении к пространству, как часто предполагают, являются как бы единственным мыслимым основанием для теории величины, имеют силу, оказывается, лишь в пределах скалярной величины. Когда мы расширяем наше понимание о величине и наделяем ее направлением и положением, то приходим к выводу, что эти законы тут недействительны. Мы принуждены допустить, что в этом случае один из этих законов или несколько теряют свою силу, или заменяются другими отличного характера. В каждом отдельном случае мы изменяем старую форму закона или останавливаемся на какой-либо новой форме для того, чтобы таким образом итти вровень с более широким толкованием, данным нами величине или ее символам.

§ 17. Положение в пространстве трех измерений.

До настоящего времени мы рассматривали только положение на плоскости; очень небольшое изменение в предшествовавших соображениях позволит нам рассмотреть, как определяется положение точки P по отношению к точке A посредством вектора AP, взятого в пространстве.

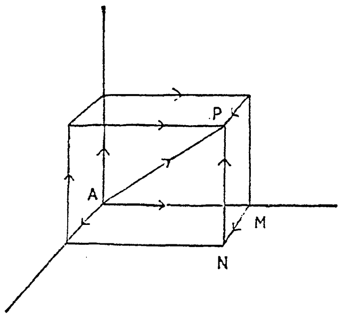
Прежде всего отметим, что для определения на плоскости положений некоторой точки P достаточно было иметь две другие точки A и B, но для установления положения точки P в пространстве нам понадобятся три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Если бы мы знали только расстояние точки P от двух точек A и B, точка P могла бы находиться на какой-либо окружности, центр которой находился бы на AB, а плоскость была бы перпендикулярной к этой прямой. Для определения положения P на этой окружности нам требуется знать еще ее расстояние от третьей точки C. Таким образом, определение положения в пространстве требует, чтобы мы имели в качестве базы [1]), по крайней мере, три точки, не лежащие на одной прямой, или какую-нибудь геометрическую фигуру, которая была бы им в этом отношении равнозначуща. Пространство, в котором мы живем, называется пространством трех измерений; оно отличается от пространства двух измерений тем, что в нем для определения положения требуется для базы не две точки, а три.

Три точки вполне определяют положение плоскости, а потому, раз нам даны в пространстве три точки A, B, C, плоскость, проведенная через них, будет вполне определенной плоскостью, разделяющей все пространство на две половины.

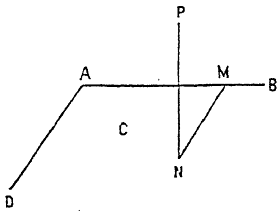
В одной из них должна лежать точка P, положение которой требуется определить. Мы можем назвать одну из этих половин, лежащей под плоскостью, другую — лежащей *над* плоскостью. Пусть PN (см. черт. 85) будет перпендикуляром, опущенным из точки P на плоскость. Если мы будем знать, как найти на плоскости ABC положение точки N, и условимся, как отсчитывать расстояние PN — вверх от плоскости или вниз, положение точки P будет совершенно определено. Мы можем условиться, чтобы все расстояния, отсчитываемые

[1]) Базис—основание; база (греч. βάσις).

вверх от плоскости, считались *положительными*, а все расстояния, отсчитываемые вниз от нее, считались отрицательными. Далее положение точки N, от которой зависит положение точки P, может быть определено при помощи одного из тех методов, какими мы пользовались при определении положения на плоскости. Таким образом, если NM проведено под прямым углом к AB, то для нахождения положения P мы имеем следующие указания: отложить вдоль AB отрезок AM, содержащий, скажем, x единиц; затем, под прямым углом к AB вправо, но в той же плоскости отложить отрезок MN, содержащий, скажем, y единиц; наконец, пройти *вверх* от N расстояние NP, по перпендикуляру к плоскости ABC, т.-е., скажем, z единиц. Мы достигнем при этом той же точки P, как в том случае, если бы мы



Черт. 85.



Черт. 86.

прошли имеющий направление отрезок AP. Если бы x было отрицательно, мы должны были бы пройти поступ в обратном направлении от A; при y отрицательном, перпендикуляр к AB должен был бы быть взят влево; если бы z было отрицательно, то пришлось бы пройти то же расстояние по перпендикуляру к плоскости, но *вниз*. Читатель легко убедится, что при соблюдении этих правил относительно знака x, y, z он будет в состоянии пройти из A в любую точку пространства.

Пусть i будет отрезок-единица вдоль по AB, j отрезок-единица по перпендикуляру к AB, но в плоскости ABC, k—отрезок-единица [1]), перпендикулярный к плоскости ABC, проходимый от основания *вверх*. Тогда мы можем написать, что

$$AP = x.i + y.j + z.k,$$

где x, y, z скалярные величины, обладающие только известным размером и знаком, тогда как i, j, k—векторы, идущие по трем взаимно перпендикулярным направлениям.

[1]) Такой отрезок-единица (или вектор-единица), имеющий данное определенное направление, носит в современной литературе иногда название «орта» от слова orientation, в сокращении ort. (*Примечание переводчика*).

Вектор AP можно рассматривать как диагональ прямоугольного тела (прямого шестигранника, как мы его называли на стр. 110); следуя по AP, мы прийдем в ту же точку P, как и при последовательном перемещении из A по трем непараллельным сторонам. Но это равносильно утверждению, что порядок, в каком мы проходим имеющие направление отрезки xi, yj и zk, не имеет значения.

Читатель теперь приходит к признанию того, что сумма некоторого числа последовательно взятых векторов равнозначна с вектором, соединяющим точку отправления первого вектора с конечным точкой последнего. Таким образом, можно вывести известную часть предложений, относящихся к векторам в пространстве трех измерений, сходных с предложениями, доказанными нами для векторов на плоскости. Разделяя все пространство на кубики тремя системами взаимно-перпендикулярных плоскостей, мы можем строить наши поверхности так же, как раньше строили кривые. Так, мы можем выбирать для x и y произвольные значения, предположив в то же время, что величина третьего отрезка связана с первыми двумя некоторым постоянным соотношением.

Так, например, если мы предположим, что прямоугольник, построенный на z и на некоторой постоянной длине a, всегда равен разности квадратов, построенных на x и y, что символически напишется в форме $az = x^2 - y^2$, то мы можем прийти в P, взяв вектор

$$AP = x \cdot i + y \cdot j + \frac{x^2 - y^2}{a} \cdot k.$$

Можно было бы показать, что совокупность точек, которые таким образом будут получаться, лежит на описанной нами (см. стр. 77) поверхности, напоминающей седло. Полученное у нас соотношение между z, x и y называется *уравнением* седлообразной поверхности.

Мы не можем, однако, изложить теорию векторов в пространстве со всей полнотой, так как это изложение вышло бы из рамок поставленной нами задачи.

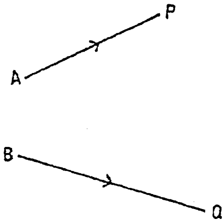
§ 18. О приложенных векторах или роторах.

До сих пор мы рассматривали положение точки P по отношению к точке A и сравнивали его с положением другой точки Q по отношению к той же точке A. В этом предположении мы рассмотрели отношение и произведение двух векторов AP и AQ.

При этом мы допускали, что два отрезка, рассматриваемых нами, либо имеют общую оконечность A, либо, по крайней мере, могут быть путем параллельного перенесения передвинуты так, что их концы совпадут. Такие отрезки называются, как мы указали, *векторами*.

Предположим, однако, что, вместо сравнения положения двух точек P и Q, отнесенных к одной и той же точке A, мы сравниваем их положение по отношению к двум различным точкам A и B. Тогда положение P по отношению к A определится посредством отрезка AP, а положение Q по отношению к B—отрезком BQ.

Надо отметить, что в данном случае эти отрезки AP и BQ имеют не только направление, не только известный размер, но сами имеют *положение в пространстве*. Поступ AP сам имеет положение в пространстве по отношению к отрезку BQ. AP уже не просто отрезок, указывающий положение P по отношению к A, взятый как целое, теперь он сам занимает положение, когда мы рассматриваем его по отношению к отрезку BQ. Это связывание с определенным местом не только точки P по отношению к A, но и всего поступа AP по отношению к другому отрезку BQ есть новое, важное понятие. Такой приложенный вектор называется *ротором* по той роли, какую он играет в теории вращения тел.



Черт. 87.

Попробуем теперь раскрыть, при помощи какой операции BQ преобразуется в ротор AB; другими словами, решим, в чем состоит операция $\frac{AP|}{|BQ}$. Для того, чтобы преобразовать BQ в AP, мы должны сделать размеры и положение BQ такими же, как у AP. BQ может быть доведено до размеров AP при посредстве операции растяжения. Это растяжение, как мы видели в случае кватерниона (см. стр. 149), может быть представлено численным отношением или только *скалярной* величиной. Если CD—кратчайшее расстояние между роторами AP и BQ, то это CD будет перпендикулярно к ним обоим [1]). Отрезок BQ может быть в таком случае приведен в совпадение с AP при помощи следующего процесса:

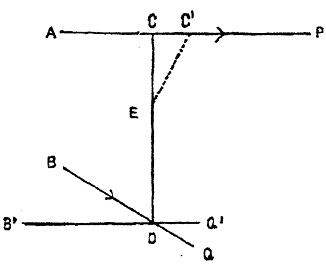
Прежде всего повернем BQ (черт. 88) около кратчайшего расстояния CD на такой угол QDQ', чтобы BQ заняло положение $B'Q'$ параллельное AP; затем заставим скользить $B'Q'$ вдоль по крат-

---

[1]) То положение, что кратчайшее расстояние между двумя прямыми есть прямая, перпендикулярная к обеим этим прямым, может быть доказано следующим образом. Предположим, что вместо прямых, у нас совершенно гладкие и чрезвычайно тонкие стержни, что на эти стержни надето два кольца, по одному на каждом кольце, связанных друг с другом натянутой упругой нитью. Оба кольца будут, очевидно, скользить по стержням, пока упругая нить не примет положения кратчайшего расстояния: этому положению соответствует наименьшее из возможных натяжений нити. Предположим, что нить образует с одним из стержней, например, в точке C не прямой угол. Придерживая нить крепко в E, мы можем переменить кольцо, находящееся в C, вдоль по стержню в положение C' так, чтобы угол $EC'C$ был бы прямым углом; так как теперь C' прямой угол, то CE должно быть больше $C'E$ (CE сторона, лежащая против наибольшего угла в треугольнике $EC'C$). Отсюда следует, что длина нити $C'E+ED$ меньше длины CD, или не может быть кратчайшим расстоянием, как то мы предположили. Таким образом кратчайшее расстояние должно образовать прямые углы с обеими прямыми.

чайшему расстоянию, оставляя $B'Q'$ параллельным самому себе до совпадения по положению с AP. Если бы мы пожелали, чтобы ротор $B'Q'$ совпал с AP, точку в точку мы должны были бы передвигать его вдоль по AP до тех пор, пока точки B' и A не совпали бы.

Эти две операции — операция вращения прямой около другой прямой, с которой она образует прямой угол, и операция передвижения ее вдоль по этой второй прямой—вполне сходны с теми операциями, которые прилагаются к прорези в шляпке винта при ввинчивании последнего в кусок дерева или к ручке пробочника когда мы завинчиваем его в пробку. Ручка пробочника в одном случае и надрез в шляпке винта в другом случае совершают не только вращательное движение, но перемещаются вперед по оси винта. Такое движение вдоль по оси и одновременно с этим вокруг нее называется *винтовым*. Отношение пути, пройденного вперед, к углу, на который совершен поворот, за время прохождения этого пути, называется *параметром* винта. Этот под'ем остается постоянным для всех поступательных перемещений, если шаг винта один и тот же. Таким образом при двойном повороте обыкновенного пробочника он пройдет в пробку на глубину в два раза большую, чем в том случае, когда он был повернут лишь один раз. Посмотрим, нельзя ли применить это представление о винте к операциям, посредством которых мы приводим ротор BQ в положение, занимаемое ротором AP. Предположим, что на стержне, взятом вместо CD, то-есть вместо кратчайшего расстояния, сделана тонкая винтовая нарезка с таким шагом, что параметр ея равен отношению CD к углу QDQ'. Если мы предположим, что BQ связано с гайкой, одетой на этом винте в D, то при повороте BQ на угол QDQ', гайка вместе с ротором BQ подвинется (в силу размера параметра, выбранного нами для винта) вперед на расстояние DC. Другими словами, BQ будет поднят до места, где находится AP, и совпадает с ним по положению и направлению.



Черт. 88.

Таким образом операции, при помощи которых BQ приводится в совпадение с AP, суть операции растяжения, сопровождаемые винтовым движением по некоторому винту. В понятии о винте заключаются понятие о его направлении, положении и параметре; в понятии о винтовом движении (например, движении гайки) около известной оси привходит еще нечто добавочное, а именно, быстрота, т.-е. тот угол, на который гайка повернулась. Размер в соединении с некоторым винтом приводит к понятию, названному автором этой книги *мо-*

тором [1]) (так как это понятие выражает наиболее общий случай мгновенного движения твердого тела). Итак, операция, при помощи которой один ротор преобразуется в другой, может быть представлена как мотор, соединенный с известным растяжением. Эта операция находится в таком же отношении к двум роторам, как кватернион к двум векторам. Мотор играет такую важную роль во многих областях физических исследований, что для читателя будет очень полезно освоиться с этим понятием.

Сумма двух векторов представляет собой, как мы видели (см. стр. 120), третий вектор; но в отличие от суммы векторов сумма двух роторов есть, вообще говоря, мотор; только в частных случаях эта сумма будет ротором или вектором. Геометрия роторов и моторов, относительно которой мы могли тут только намекнуть, составляет основание всей современной теории относительного покоя (статика) и относительного движения (кинематика и кинетика) неизменяемых систем.

§ 19 О кривизне пространства.

Главной темой этой главы было положение, а именно, положение точки P относительно точки A. Это относительное положение естественным образом привело к рассмотрению геометрии векторов. Я исходил из той гипотезы, что всякое положение относительно и потому должно быть определяемо только путем процесса поступов. Относительность положения была постулатом, выведенным из обычных методов определения положения,—методов, действительно, всегда дающих положение относительное. *Относительность положения есть таким образом постулат, полученный из опыта.* Профессор Клерк-Максвелл вполне выразил важность этого постулата в следующих словах:

„Все наше знание времени и пространства относительно. Кто привык складывать слова, не заботясь об образовании мыслей, которые должны были бы им соответствовать, тот с легкостью отметит контраст между этим относительным знанием и знанием так называемым абсолютным и укажет на наше незнание абсолютного положения точки, как на пример ограниченности наших способностей. Всякий, однако, кто попытался бы вообразить состояние ума, обладающего знанием абсолютного положения точки, будет потом всегда довольствоваться нашим относительным знанием“ [2]).

Установление того, насколько мы можем быть уверенными в справедливости наших постулатов в точных науках, представляется делом столь важным, что я попрошу читателя вернуться к рассмотрению нашего понятия о положении, хотя с несколько иной точки зрения.

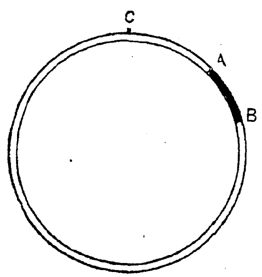
---

[1]) „Preliminary Sketch of Biquaternions“, *Proceedings of the London Mathematical society*, vol. VI, p. 383. См. приложение в конце книги, стр. 205.

[2]) Клерк-Максвелл. „Материя и движение“, § 18.

Я даже попрошу его попытаться исследовать то состояние ума, на которое указал профессор Клерк-Максвелл в выше приведенном отрывке.

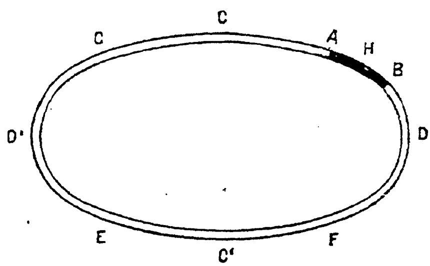
Предположим, что у нас имеется трубка с чрезвычайно тонким отверстием, согнутая в виде круга, и что внутри ее находится червь, длиной AB. В предельном случае, когда мы считаем отверстие трубки и самого червя бесконечно малыми, мы прийдем к рассмотрению пространства одного измерения. С того времени, как мы на трубке отметили *одну* хотя бы точку C, длины CA достаточно для определения положения червя. Если мы допустим, что червь не может познавать что-либо вне пространства его трубки, то он все же будет в состоянии сделать некоторые заключения относительно характера пространства, в котором он существует, лишь бы только он мог различить какую-либо метку C на поверхности его трубки. Таким образом червь заметил бы, когда именно он возвращается в точку C; он нашел бы, что это возвращение постоянно повторяется каждый раз, как он обойдет канал. Далее червь всегда будет иметь дело с одним и тем же *размером кривизны*, ибо все части круга имеют одну и ту форму, а потому понятно, что он сделает допущение об *одинаковости* повсюду пространства, т.-е., что пространство обладает во всех точках одними и теми же свойствами. Это допущение совершенно сходно с тем, которое мы делаем относительно постулатов в евклидовой геометрии: постулаты эти, как учит нас опыт, оказываются на практике справедливыми для пространства, нас непосредственно окружающего, и мы утверждаем, что они справедливы также для всего пространства; мы допускаем таким образом одинаковость нашего пространства трех измерений. Но червь имеет большее право на свой постулат, чем мы, потому что он побывал во всех частях своего пространства одного измерения.



Черт. 89.

Кроме ограниченности и одинаковости своего пространства, червь может удостовериться в относительности положения и может определить свое положение длиной дуги, заключающейся между C и A. Внесем теперь изменение в нашу задачу и предположим, что червь не в состоянии ни сделать какой бы то ни было отметки на трубе, ни распознать ее. В таком случае очевидно, что червь не имел бы возможности убедиться, ограничено ли его пространство или нет; он никогда не будет знать, когда он окончил полное обращение по своей трубе. Так как червь будет всегда иметь дело с одной и той же величиной кривизны, он, естественно, будет соединять в своем представлении эту *кривизну с некоторыми физическими свойствами, а не с пространством, в котором он перемещался.* Таким образом он вполне в праве был бы предположить, что его пространство бесконечно или что он движется в бесконечно длинной трубе. Если бы таким образом червь связывал кривизну с ее физическими условиями, то он не нашел бы никакой разницы между движением в пространстве постоянной кривизны (круг) и движением в таком пространстве, которое называется *гомалоидальным* или плоским (прямая линия); если бы он внезапно был перенесен из одного пространства в другое, то он приписал бы ощущение, происшедшее от разницы в кривизне, некоторому изменению, происшедшему в его физическом строении. Отсюда следует, что в пространстве одного измерения и постоянной кривизны всякое положение по необходимости относительно; и конечный или бесконечный характер пространства будет восприниматься как постулат возможности или невозможности определить положение в нем точки [1]).

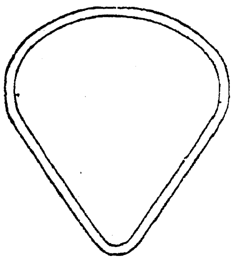
Предположим, что наш червь движется в трубе другого рода; например, в трубке той формы, той проекции круга, которую мы называли эллипсом (черт. 90). В такой трубке степень искривления не везде одна и та же; червь при перемещении от места наименьшей кривизны C к месту наибольшей D будет проходить через последовательно изменяющиеся кривизны, и в каждой точке H между C и D будет своя собственная кривизна. Итак, существует нечто такое, что стоит особо от определения положения H относительно C и что в то же время характеризует собой точку H. Это особая для каждого положения H степень кривизны и связанная с этой точкой; таким образом положение точки H на CD сразу определяется, раз мы знаем степень сгиба. Таким образом червь может определить *абсолютное* положение в своем пространстве по степени сгиба, связанной с тем или другим положением. Червь в состоянии теперь оценить различие в сгибе и может даже образовать скалу кривизн, возрастающую на равные величины. Нуль такой шкалы может быть по желанию червя взят где угодно, и степени большего и меньшего сгиба могут быть отсчитываемы от этого нуля, как положительные и отрицательные величины. На практике такой нуль может быть чисто воображаемым, то-есть представлять собой ту степень гнутия, которой не существует в пространстве червя. Так, например, в случае эллипса за нуль можно принять абсолютную прямоту, понятие, которое червь может предста-



Черт. 90.

[1]) При этом предполагается, что пространство одного измерения и постоянной кривизны лежит в плоскости. Высказанные соображения неприменимы к такому пространству, как винтовая линия (пробочник), которая обладает постоянной кривизной, но не конечна.

вить, как предел для его опытного понимания степеней сгиба[1]). Таким образом в пространстве „переменного сгиба“ или в пространстве, части которого не все одинаковы, положение не должно быть необходимо относительным. Понятие относительности тут уже не связывается с положением в пространстве и переносится на шкалу сгибов, построенную червем; относительность положения становится *относительностью физических чувствований*. В случае эллиптического канала, в силу симметрии, существует четыре точки одинакового сгиба, а именно: H, E, F и G, но между H, F и E, G существует следующее различие. Если червь движется кругом по каналу в направлении, обозначенном буквами $CHDE$, то в H или F он будет переходить от положений меньшего сгиба к положениям большего сгиба, и, наоборот, в E или G от положений бо́льшего сгиба—к положениям меньшего. Придется тогда предположить, что только точки H и F тожественны, потому что лишь они обладают одной и той же степенью сгиба. Но мы могли откинуть даже и эти сомнения, предположив, что червь движется по грушевидному каналу, как на помещенном выше чертеже (черт. 91). В этом случае будет лишь две точки равного сгиба, а именно—H и G, которые легко отличить друг от друга путем, указанным выше.



Черт. 91.

Мы могли бы таким образом отсюда заключить, что в пространстве одного измерения и переменного сгиба положение не должно быть необходимо относительным. Высказывая такое суждение, мы, однако, должны отметить следующее обстоятельство: мы допустили, что червь будет соединять в своем представлении изменение сгиба с изменением положения в его пространстве, но червь может воспринять последнее либо как изменение физического состояния, либо как изменение ощущений. Отсюда следует, что червь легко может впасть в ошибку, приняв постулат о тожественности пространства во всех его частях и приписав все изменения в сгибе пространства, в действительности происходящие от изменения положения, некоторым периодическим изменениям, которым подвергается его организм (если червь передвигается вокруг по каналу равномерно), или непериодическим (если он движется каким бы то ни было образом взад и вперед). Подобные результаты могли бы получиться, если бы червь перемещался в пространстве одной и той кривизны, при чем эта кривизна, как целое, подверглась бы изменениям в силу некоторого воздействия извне, или если бы пространство червя было бы пространством переменной кривизны, которое было бы также способно претерпевать во времени всякого рода изменения. Читатель может представить себе все эти

[1]) Физики могут припомнить при этом абсолютный нуль температуры.

случаи, предположив, что трубка сделана из гибкого материала. Червь может приписать изменение в степени сгиба или изменению характера пространства или изменению его организма, не связанному с положением в пространстве. Мы приходим к заключению, что постулат об относительности положения не является необходимо обязательным для пространств одного измерения и переменного сгиба.

Переходя от пространства одного измерения к пространству двух измерений, мы получаем результаты совершенно сходного характера.

Если мы возьмем совершенно ровное (так называемое *гомалоидальное*) пространство двух измерений, то-есть плоскость, то в таком пространстве совершенно плоская фигура может быть перемещена куда бы то ни было без изменения ее формы. Если по аналогии с бесконечно тонким червем мы вообразим бесконечно тонкую камбалу, то такая рыба не будет в состоянии определить положения, раз ей не дано возможности наносить в ее плоском пространстве какие-либо метки. Как только она определила положение двух точек в ее плоскости, она будет в состоянии определить и *относительное* положение.

Предположим теперь, что вместо этого гомалоидального пространства двух измерений мы должны были бы взять совершенно тожественное во всех своих частях пространство, но пространство некоторой конечной кривизны, то-есть поверхность сферы. В таком случае растянем и изогнем нашу камбалу, чтобы она совпала с какой-нибудь частью шара. Так как поверхность сферы представляет собой во всех частях пространство одной и той же формы, то наша рыба может перемещаться по поверхности, не изменяя ни в каком отношении размеров своего сгиба и растяжения, какие мы нашли необходимым ей придать для того, чтобы она совпадала со сферой в одном каком-нибудь своем положении. Если бы рыба не могла провести межу на поверхности шара, она была бы совершенно не в состоянии определить положение; если она могла бы поставить, по крайней мере, две вехи, она была бы в состоянии определить *относительное* положение. Совершенно подобно червю в круговом канале, рыба, не имеющая вех, могла бы с полным правом предположить, что ее пространство бесконечно, или даже принять его за совершенно плоское (гомалоидальное) и приписать постоянство степени сгиба и растяжения физическим условиям.

Перейдем теперь к некоторому пространству двух измерений, которое не во всех своих частях тожественно,—к некоторому пространству, сходному, скажем, с той седлообразной поверхностью, которую мы рассматривали на стр. 77, — поверхностью, сгиб которой при переходе одной части к другой изменяется. В этом случае рыба, прилегающая вплотную к одной части поверхности, не должна непременно совпадать со всякой другой частью. Все время, как рыба будет передвигаться по поверхности, должен непрерывно совершаться процесс изгибания и растяжения. Таким образом каждая часть пространства двух измерений будет определяться своей особой величиной изгиба и растяжения, какие должна испытать рыба, чтобы совпасть с поверхностью, иначе говоря, каждая часть пространства будет определяться тем, что обыкновенно называют *кривизной*. У поверхностей, обладающих известной степенью симметрии, непременно окажутся части равной кривизны, и в некоторых случаях наша рыба, быть-может, будет в состоянии найти отличия этих точек друг от друга, подобно тому, как в случае эллиптического канала различал точки одинаковой кривизны червь. На поверхностях неправильной формы не должны, однако, непременно находиться такие точки одинаковой кривизны. Мы пришли, таким образом, к заключениям, сходным с теми заключениями, сделанными нами по отношению к пространству одного измерения, а именно: в пространстве двух измерений, неодинаковом во всех своих частях, положение может быть определяемо *абсолютно* посредством кривизны. Нашей рыбе для определения своего абсолютного положения в пространстве пришлось бы только носить с собой при передвижении шкалу размеров изгиба и растяжения, соответствующих различным положениям на поверхности, но, с другой стороны, рыба легко могла бы приписать все эти изменения изгиба и растяжения изменениям ее организма, совершенно не зависящим от ее положения в пространстве. Таким образом наша рыба могла бы уверить себя, что жизнь ее организма до чрезвычайности изменчива, что ее физические чувствования претерпевают непрерывные изменения совершенно независимо от геометрического характера того пространства, в котором она живет. Она могла бы предположить, что пространство обладает совершенной тожественностью во всех своих частях или даже переходит в „тоскливую бесконечность гомалоида“ [1]).

В результате нашего рассмотрения пространств одного и двух измерений мы находим, что если эти пространства не одинаковы во всех своих частях (à fortiori не гомалоидальны), то при помощи их кривизны мы можем определить положение абсолютно. Но мы видим также, что существо, живущее в этих пространствах, с большой вероятностью приписало бы действие кривизны изменениям в его собственном физическом состоянии, ни в каком случае не связывая в своем толковании такое воздействие с геометрическим характером пространства.

Какой же урок могут дать нам эти соображения в применении к пространству трех измерений, в которых мы сами существуем? Начнем с того, что все наше пространство всюду совершенно *одно и то же*, что и тела при переходе из одного положения в другое.

---

[1]) Предположим, что в этом случае пространством двух измерений будет плоскость. См. Klifford's „Lectures and Essays“, vol. I, p. 323.

Этот постулат о тожественности пространства мы основываем на результатах наблюдения в той несколько ограниченной части пространства, относительно которой мы осведомлены [1]). Предположим, что наши наблюдения правильны, но из того, что одна часть пространства, которую мы знаем, в практических вопросах оказывается во всех своих частях тожественной, ни в каком случае не следует, что *все* пространство всюду одинаково [2]). Такое допущение является лишь догматическим расширением (на область неизвестного) того постулата, который, быть-может, уместен для пространства, над коим мы можем производить опыт. Построение таких догматических утверждений по отношению к неизвестному скорее дело средневекового теолога, чем современного ученого. На подобном основании на ряду с постулатом о тожественности нашего пространства во всех его частях находится дальнейшее утверждение о том, что это пространство гомалоидально. Когда мы утверждаем, что наше пространство повсюду одно и то же, мы предполагаем, что оно обладает постоянной кривизной (подобно кругу, представителю пространства одного измерения, и шару, представителю пространства двух измерений). Предполагая, что пространство гомалоидально, мы допускаем, что кривизна его равна нулю (подобно кривизне прямой в пространстве одного измерения, и кривизне плоскости в пространстве двух измерений). Это допущение принимает в нашей геометрии следующую форму: две параллельные плоскости или две параллельные прямые в одной и той же плоскости, то-есть плоскости или прямые, которые, будучи продолжены как угодно далеко, никогда не пересекаются, имеют *действительное* существование в нашем пространстве. Это действительное существование, быть осведомленными относительно которого мы, очевидно, не можем, мы вставляем как постулат; мы рассматриваем этот постулат, как вывод, построенный на нашем опыте, обнимающем то, что совершается в ограниченной части пространства.

Мы можем принять как постулат, что та часть пространства, относительно которой мы осведомлены, на практике гомалоидальна, но, очевидно, мы не имеем никакого права догматически распростра-

---

[1]) Может явиться мысль, что постулат о тожественности во всех частях нашего пространства имеет опору в том, что до сих пор никому не удалось дать какое-либо геометрическое представление о кривизне пространства. Но, независимо от того, что человечество обыкновенно делает допущения относительно многих вещей, о которых не в состоянии составить геометрическое понятие (например, циклические точки на бесконечности у математиков), я должен заметить, что мы не можем ожидать, чтобы какое-нибудь существо было в состоянии составить себе геометрическое понятие о кривизне его пространства раньше, чем оно увидит его из пространства высшего измерения, то-есть на деле—никогда.

[2]) Следует отметить, что из факта *кажущегося* сохранения одной и той же формы телом, движущимся в той части пространства, с которой мы знакомы, не следует, что тело *действительно* сохраняет свою форму. Изменения формы либо могут быть неуловимы на тех расстояниях, на которые мы можем передвинуть наше тело, либо, если они имеют место, могут быть приписаны нами таким „физическим причинам", как теплота, свет или магнетизм, которые, быть-может, служат лишь именами для изменений кривизны нашего пространства.

нять этот постулат на *все* пространство. Постоянная кривизна, неулавливаемая восприятием в той части пространства, относительно которой мы только и можем производить опыты, или даже кривизна, изменяющаяся во времени совершенно неуловимым образом, вполне удовлетворяла бы всему тому, что наш опыт научил нас считать справедливым по отношению к пространству, в котором мы живем.

Но мы можем продолжить нашу аналогию на шаг дальше. Ведь наши воображаемые червь и рыба с большой готовностью приписывали результаты изменений в сгибе их пространств изменениям в их собственном организме; спросим же себя, не можем ли и мы подобным же образом рассматривать как изменение физического характера те действия, которые на самом деле обязаны своим происхождением изменениям в кривизне нашего пространства. Не окажется ли, что все или некоторые из тех причин, которые мы называем физическими, свое начало ведут от геометрического строения нашего пространства?

Вот те три рода изменений кривизны в пространстве, которые мы должны признать лежащими в пределах возможного:

I. Пространство наше, быть-может, действительно, обладает кривизной, меняющейся при переходе от одной точки к другой,—кривизной, которую нам не удается определить, или потому, что мы знакомы лишь с небольшой частью пространства, или потому, что мы смешиваем незначительные происходящие в нем изменения с переменами в условиях нашего физического существования, последние же мы не связываем с переменами в нашем положении. Мы должны допустить, что ум, который мог бы распознать эту изменяющуюся кривизну, обладал бы знанием абсолютного положения точки. Для такого ума постулат об относительности положения потерял бы всякое значение. Едва ли так трудно представить себе подобное состояние ума, как в том хотел уверить нас профессор Клерк-Максвелл. Таким существом было бы лицо, способное распознавать так называемые физические изменения, которые в действительности являются изменениями геометрическими или, иначе говоря, возникают благодаря изменению положения в пространстве.

II. Наше пространство может быть действительно тожественно во всех своих частях (имеет одинаковую кривизну), но величина его кривизны может изменяться как целое во времени. В таком случае наша геометрия, основанная на тожественности пространства, сохранит свою силу для всех частей пространства, но перемены в кривизне могут произвести в пространстве ряд последовательных видимых физических изменений.

III. Мы можем мыслить наше пространство, как имеющее повсюду приблизительно однородную кривизну, но легкие изменения кривизны могут существовать при переходе от одной точки к другой, в свою очередь, изменяясь во времени. Эти изменения кривизны во времени могут произвести явления, которые мы не так уж неестественно приписываем физическим причинам, не зависящим от геометрии нашего пространства. Мы можем зайти тут настолько далеко, что припишем изменению кривизны даже то, что „в действительности происходит в явлении, называемом нами движением материи“ [1]. Мы ввели эти соображения относительно природы нашего пространства для того, чтобы освоить читателя с характером тех постулатов, которые мы предлагаем в точных науках. Эти постулаты не являются необходимыми и всеобщими истинами, как это слишком часто допускают. Это лишь аксиомы, основанные на нашем опыте относительно известной ограниченной области. Подобно тому, как в какой-нибудь области физического исследования мы отправляемся от опытов и основываем на них ряд аксиом, составляющих основание точной науки, так и в геометрии наши аксиомы, хотя это менее очевидно, являются результатом опыта. На этом-то основании геометрия была названа в начале второй главы одной из естественных наук. Опасность догматического утверждения, что аксиома, основанная на опыте, относящемся к ограниченной области, сохраняет силу повсюду, предстанет теперь перед читателем с известной отчетливостью. Этот перенос может привести нас к тому, что мы совершенно проглядели бы или под чьим-либо влиянием отбросили бы возможное об‘яснение явлений. Гипотезам, гласящим, что пространство не гомалоидально, что его геометрический характер может меняться во времени, быть-может, суждено или не суждено сыграть большую роль в физике будущего, но мы не в праве не рассматривать их как возможные об‘яснения физических явлений, потому что их можно противопоставить повсюду распространенному догматическому верованию в всеобщность известных геометрических теорем,—верованию, образовавшемуся благодаря столетиям непрерываемого почитания гения Евклида.

---

[1]) Эти замечательные *возможности* впервые были высказаны профессором Клиффордом, кажется, в сообщении, сделанном им в Кембриджском Философском обществе в 1879 году (Mathematical Papers, p. 21). Я мог бы прибавить сюда следующее: наиболее примечательными физическими величинами, изменяющимися с изменением положения, а также во времени, являются: теплота, свет и электро-магнетизм. Особенно эти явления надо исследовать при отыскании каких-либо физических изменений, которые можно было бы приписать изменениям в кривизне пространства. Если мы предположим, что границы какого-нибудь произвольного тела в пространстве были искажены изменением пространственной кривизны, то, по аналогии с пространством одного или двух измерений, от такого искажения не последовало бы никакого изменения об‘ема тела. Далее, если мы *допустим*, как аксиому, что сопротивление, оказываемое пространством искривлению, пропорционально изменению, то мы найдем, что волны „перемещения пространства“ в точности сходны с волнами той упругой среды, которая, согласно нашему предположению, распространяет свет и теплоту. Мы находим также, что „винтовое движение пространства“ есть величина, совершенно точно отвечающая магнитной индукции и удовлетворяющая отношениям, сходным с теми, которые имеют место в магнитном поле. И еще вопрос, не сочтут ли физики более простым предположить, что пространство способно испытывать изменения кривизны и оказывать сопротивление этим изменениям, чем допускать существование тончайшей среды, проникающей повсюду в неизменяемое гомалоидальное пространство.

ГЛАВА V.

Движение.

---

§ 1. О различных родах движения.

В главах о пространстве и положении мы рассматривали размеры, формы предметов и расстояния между ними, в настоящей же главе о движении мы займемся исследованием изменений этих размеров, форм и расстояний, имеющих место за известный промежуток времени.

Различие между обычным значением, связываемым со словом „изменение" в повседневной жизни, и тем значением, какое оно имеет в точных науках, поясняется содержанием этой главы, быть может, лучше, чем каким-либо другим материалом, уже нами рассмотренным. Мы достигли точности в описании величины и положения, заменив метод представления их при помощи чисел методом представления их при помощи прямых линий. Правда, только, на первый взгляд легко может показаться, что это скорее шаг назад, нежели шаг вперед; такой прием скорее напоминает о жесте ребенка, разводящего руки для того, чтобы показать, что его палка имеет такую-то длину, нежели о процессе научного исчисления.

Тем не менее далеко не легкое дело дать точное описание движения, несмотря на то, что это понятие столь же обычное и распространенное, как понятие о величине или положении.

Возьмем простой пример. Вообразим человека, путешествующего по железной дороге и сидящего в одном конце купе лицом к паровозу. Пусть во время движения поезда он встает, переходит в другой конец купе и садится теперь спиной к паровозу. Для целей повседневной жизни такого описания было бы вполне достаточно, и тем не менее это описание далеко от того, что мы в праве требовать от точного описания человека за это время. Прежде всего поезд двигался, а потому необходимо установить, в каком направлении и как быстро он шел в каждый момент рассматриваемого промежутка времени. Далее мы должны описать движение человека относительно поезда и для этого должны пренебречь движением поезда и рассмотреть, как двигался бы человек, если бы поезд оставался в покое. В самом деле он меняет свое положение, переходя из одного угла купе в угол противоположный; сделав это, он поворачивается; независимо от этого во время перехода вдоль по вагону в то время, когда он встает с места или садится, размеры и форма его мускулов изменяются. Таким образом, мы должны были бы сказать, как быстро и в каком направлении он двигался каждый момент, как это мы делаем в случае поезда, затем, с какой быстротой он поворачивался, и, наконец, какие изменения размеров и формы его мускулов имели место и как часто они происходили.

Необходимо подчеркнуть, что это было бы чрезвычайно затруднительной задачей и что никому нет надобности описывать движение человека так точно. И это совершенно верно. Случай, взятый нами для иллюстрации, не принадлежит к числу тех случаев, где было бы необходимо точное описание; мы можем, однако, легко отыскать другой случай, очень похожий на выше приведенный, при чем точное описание здесь чрезвычайно важно. Земля совершает свой оборот вокруг солнца ежегодно; свое вращение вокруг своей собственной оси— один раз ежедневно; текучие части ее (океан и воздух) постоянно подвержены переменам формы и состояния, которые мы можем наблюдать, при чем иметь возможность предсказать или вычислить эти изменения представляется для нас делом чрезвычайной важности. Даже твердое ядро земли постоянно подвержено незначительным изменениям размера и формы, которые, однако, недостаточно велики, чтобы над ними можно было произвести точные наблюдения. Тут перед нами задача совершенно такой же сложности, как предыдущая, при чем разрешение ее представляет настоятельную практическую потребность.

Метод, выбранный нами для разрешения этой задачи тщательного описания движения, состоит в том, чтобы начинать это описание с простейших случаев. Под простейшими случаями мы подразумеваем такие, в которых известные осложняющие обстоятельства не появляются. Мы можем прежде всего ограничиться изучением движений тех тел, у которых не происходит изменений размеров и формы. Тело, сохраняющее в течение рассматриваемого промежутка времени свой размер и форму неизменными, называется *твердым* телом. Слово „твердый“ употреблено здесь в техническом смысле, взятом из области динамики, и не означает, как в обиходном языке, что тело оказывает сопротивление изменению его размеров и вида; у нас речь идет лишь о теле, которое в течение известного промежутка времени не изменяется в указанных только что отношениях. Поэтому мы остановимся, как на первом и простейшем случае, на том движении твердого тела, при котором нет вращений: при таком движении каждая прямая сохраняет одно и то же направление (но, конечно, не одно и то же положение). Это условие мы устанавливаем, говоря, что всякая прямая, „неизменно соединенная“ с телом, остается параллельной самой себе. Такое движение называется *движением перенесения*, *параллельным* *перенесением*, или просто *перенесением*. Итак, первым и простейшим случаем, подлежащим нашему изучению, является перенесение твердых тел. После этого мы должны перейти к рассмотрению их поворотов или рассмотрению *вращения;* затем, мы должны описать изменения размера или формы, какие может претерпеть тело,—эти последние изменения называются *натяжениями*. Поэтому изучение движения требует изучения перенесений, вращений и натяжений, и далее затем искусства сочетания их друг с другом. Когда мы изучим все это, мы будем в состоянии описывать движения точно; и только тогда, но не раньше, окажется возможным установить точно те обстоятельства, при которых возникают движения данного рода. Точные условия, при которых возникают движения данного рода, мы называем *законом природы*.

§ 2. Параллельное перенесение и кривая положений.

Побеседуем сначала о параллельном перенесении твердого тела. Предположим, что надо перенести стол из верхней части дома вниз таким образом, чтобы его доска все время оставалась горизонтальной и чтобы длиной своей он все время был обращен по линии север-юг. Его можно снести по лестнице какого угодно вида, нельзя только при этом его поворачивать или наклонять. В этом случае стол подвергается *параллельному перенесению*. Если мы теперь рассмотрим один какой-нибудь угол стола или конец одной из его ножек или какую-нибудь другую точку, то эта точка опишет известным образом известную кривую; другими словами, в каждой точке этой кривой будет происходить перемещение известного определенного размера. Наиболее важным свойством *перенесения*, делающим его более легким для изучения, чем какое-либо другое движение, является то, что для всех точек тела эта кривая одна и та же по размеру, форме и характеру ее образования. Что в случае стола эти условия осуществляются, видно тотчас из того, что стол ни разу не поворачивают и не нагибают во время движения, так что различные точки его должны в каждый момент двигаться в одном и том же направлении и с той же скоростью. Поэтому для описания этого движения стола достаточно будет описать движение какой-нибудь точки его; скажем, конца одной из его ножек. Равным образом и вообще задача описания параллельного перенесения твердого тела сводится к задаче описания движения точки по кривой.

Но это будет гораздо более легкой задачей, нежели наша первоначальная задача описания движения земли или движение человека в поезде. Мы увидим, что при надлежащем изучении ее нам будет легко исследовать, пользуясь ею, другие более сложные случаи.

Однако даже и в этой форме наша задача совершенно не настолько упрощена, чтобы к ней можно было прямо подойти. Вспомним, что мы добиваемся того, чтобы точно установить, где известная точка находилась и как быстро она передвигалась в каждый момент некоторого определенного промежутка времени. Это потребовало бы от нас прежде всего точного описания формы кривой, по которой точка двигалась; далее мы должны были бы сказать, как далеко прошла она по кривой с момента начала движения до некоторого данного момента, и, наконец, как быстро она передвигалась в данный момент. Для изучения этой задачи мы должны взять прежде всего простейший случай ее, а именно тот, когда точка движется по прямой линии, и до поры до времени оставить в стороне какое бы то ни было описание быстроты движения точки. Итак, мы должны сказать лишь то, где данная точка находилась на известной прямой в каждый момент данного промежутка времени.

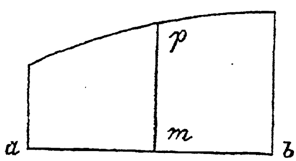
Но мы уже рассмотрели вопрос о наилучшем способе описания положения точки на прямой линии. Оно описывается при помощи вектора, который необходимо провести к этому положению из некоторого места, принимаемого за основное, за образцовое, а именно, вектора, идущего на известное расстояние вправо или влево. Для определения длины вектора, если нам надо описать ее точно, мы не должны пользоваться какими-нибудь словами или числами; вместо этого мы проведем прямую, которая будет представлять длину, соответствующую каждому моменту известного промежутка времени, и, таким образом, будем всегда в состоянии ответить на вопрос о том, *где* была точка в тот или иной частный момент? Но для того, чтобы точно ответить, необходимо, чтобы самый вопрос был поставлен точно, а для этого необходимо, чтобы момент, относительно которого задается вопрос, был точно оценен.

Время, подобно длине, представляет собой непрерывную величину, которая не может быть в общем описана словами или числами, но его можно описать, начертив прямую, которая представит его в известной шкале. Предположим, что промежуток времени, за который надо описать движение, есть время от полудня до часа. Мы отметим на прямой точку, представляющую собой двенадцать часов, и другую точку, представляющую собой час. Тогда каждый момент между двенадцатью и часом будет представлен точкой, разделяющей расстояние между двумя отмеченными точками в таком же отношении, в каком этот момент разделяет промежуток времени между двенадцатью часами и часом. Далее к каждой из этих точек должно отнести известную длину, представляющую (в некоторой определенной шкале) расстояние, пройденное точкой до данного момента, но тут-то возникает следующий вопрос: как отмечать нам эти длины?

Обратим прежде всего внимание на трудность ответа на этот вопрос. Если бы мы могли довольствоваться приближенным решением, вместо точного, мы составили бы таблицу, занося в нее в дюймах и десятых долях дюйма пройденные расстояния, делая такие записи в течение часа для каждой минуты или даже каждой секунды. Такие таблицы, действительно, построены и отпечатаны в „Nautical Almanac" для положений луны и других планет.

Трудность составления таких таблиц, очевидно, зависит от ее подробности: для построения таблицы, показывающей положение точки каждую секунду, пришлось бы затратить труда в шестьдесят раз больше, чем для таблицы, показывающей положение лишь для отдельных минут, потому что при этом пришлось бы найти в шестьдесят раз больше числовых значений. Такие значения, однако, могут быть показаны даже не в дюймах и десятых долях дюйма, а, вообще говоря, длинами, начерченными на бумаге. Мы найдем, сверх того, что этот образный способ построения таблицы в громадном большинстве случаев гораздо легче, чем другие способы. Нам надо только решить, где мы будем проводить прямые, представляющие расстояния, пройденные точкой до того или другого момента.

Пусть ab длина, представляющая промежуток времени между двенадцатью часами и часом, m точка, представляющая промежуточный момент (черт. 92). Если мы восставим в точке m перпендикуляр к ab, длина которого (в произвольно выбранном нами масштабе) будет характеризовать расстояние, пройденное точкой до данного момента, то p (конец этой прямой) будет соответствовать записи на нашей таблице. Но если такие перпендикуляры к ab выставить в каждой точке этой прямой, то все точки p, находящиеся на концах таких перпендикуляров, будут лежать на некоторой кривой; такая кривая будет представлять бесконечное число записей нашей таблицы. Действительно, раз начерчена такая кривая, то на заданный вопрос о положении точки в любой момент между двенадцатью часами и часом (этот момент может быть правильно обозначен точкой, лежащей между a и b и разделяющей эту прямую в таком же отношении, в каком данный момент разделяет час) ответ получается просто следующим образом: проводим через отмеченную точку перпендикуляр к ab до пересечения с кривой; длина этого перпендикуляра, в заранее условленном масштабе, представит расстояние, пройденное точкой.



Черт. 92.

Такая кривая называется *кривой положений* для данного движения точки. Мы замечаем отсюда, что удобным способом для точного обозначения перенесения по прямой линии является проведение кривой положений.

Мы узнали теперь, как с помощью кривой можно означать положение тела, переносимого параллельно вдоль по прямой, и мы не только представили бесконечное число положений, вместо конечного, что только разве и могла нам дать таблица чисел, но в то же время представили всякое положение с абсолютной точностью, а не приближенно.

Важно указать, что тут, как и во всех подобных случаях, точность является идеалом, а не практически осуществимой задачей. Это точность понятия, а не действительного измерения. В самом деле, хотя измерение данных длин и определение этих длин при помощи вычерчивания прямых не может быть выполнено с большей тщательностью, чем это делается при записи таких длин в дюймах и десятичных долях дюйма, но представление при помощи прямых позволяет нам в то же время основываться на них с той точностью, какая была бы невозможна, если бы мы ограничились числовым измерением.

§ 3. Равномерное движение.

До сих пор мы предполагали, что наша точка движется по прямой; но если бы точка двигалась по кривой, то построение, данное нами для кривой положений, осталось бы в силе и теперь: только расстояние, проходимое до известного момента, пришлось бы отмеривать от некоторого определенного положения уже *вдоль по кривой*. Таким образом движение точки или какое-нибудь перенесение могут быть обозначены соответственным образом выбранной кривой положения, и задача сравнения и классификации различных движений сводится поэтому к задаче сравнения и классификации различных кривых. Здесь, как и раньше, желательно и даже необходимо начинать с простого случая. Возьмем случай равномерного движения, при котором тело проходит равные расстояния в равные промежутки времени; легко видеть, что кривая положений представляется здесь прямой линией. Равномерное движение может быть описано, как такое движение, при котором тело движется всегда с одной и той же быстротой, а не так, чтобы одно время двигаться быстрее, а в другое медленнее. Очевидно, что в этом случае для прохождения двух равных расстояний потребуются равные же промежутки времени; таким образом, два данных описания равномерного движения равнозначущи.

Архимед показал (доказательство это легкое: оно основано на определении четвертой пропорциональной), что если равные расстояния проходятся в одинаковые промежутки времени, то различные расстояния проходятся в промежутки времени, пропорциональные этим расстояниям. Допуская это предложение, мы приходим к тому, что кривая положений, очевидно, должна быть прямой линией, так как из всех кривых только одна прямая обладает тем свойством, что высота ее в любой точке пропорциональна горизонтальному расстоянию от некоторой определенной по положению прямой.

Связь между прямой линией и равномерным движением мы можем проследить также следующим образом.

Предположим, что мы подымаемся на холм с таким расчетом, чтобы по горизонтальному направлению проходить по четыре версты в час. Быстрота, с какой мы подымаемся, очевидно, зависит от крутизны холма; если бы наш холм был плоскостью, т.-е., если бы он всю дорогу представлял одну и ту же крутизну, то наша быстрота восхождения была бы одна и та же в каждый момент, или, иначе говоря, наше движение вверх было бы равномерным. Если холм имеет в длину четыре мили, а в высоту одну милю, то проходя в один час эти четыре мили горизонтального расстояния, мы пройдем одну милю расстояния по вертикали также в один час, и таким образом достигнем вершины, двигаясь с равномерной быстротой одной мили в час. Если бы холм имел в высоту две мили или, как мы можем сказать, если бы он был в два раза круче, то нам пришлось бы подыматься на вершину с быстротой двух миль в час. Если мы теперь предположим, что крутизна холма переменна, так что контур его со стороны будет казаться кривой, то быстрота, с какой мы будем подыматься вверх, очевидно, будет зависеть от характера той части холма, на которой мы находимся (мы допускаем, что быстрота, с какой мы подвигаемся вперед горизонтально, остается все время одной и той же). Этот „под‘ем“ холма может быть принят за кривую положений нашего вертикального движения. Действительно, расстояния, проходимые нами по горизонтальной линии, все время пропорциональны времени; значит ими можно пользоваться для представления времени и потому сказанная кривая окажется построенной согласно нашему правилу: расстояние, проходимое по горизонтальной линии, пропорционально протекшему времени; восставленный же из конца каждой такой прямой перпендикуляр будет показывать высоту, на которую мы поднялись за это время. В равномерном движении кривая положений представляется таким образом прямой линией, а быстрота движения зависит от крутизны этой прямой. В переменном движении с другой стороны кривая положений представляется кривой же линией, а быстрота движения зависит от изменяющейся крутизны.

В случае равномерного движения легко понять, что мы подразумеваем под быстротой движения. А именно, если человек проходит в час равномерно шесть миль, то мы знаем, что одну милю он проходит в десять минут, десятую часть мили — в одну минуту и т. д. в соответственной пропорции. Тем не менее, может случиться, что мы не в состоянии будем обозначить эту скорость при посредстве чисел, т.-е. человек может в час не пройти определенного числа миль, и расстояние, пройденное им, нельзя представить в милях и долях мили.

В этом случае мы должны будем представить скорость, или быстроту, с какой идет человек, совершенно тем же путем, каким мы представляли другие непрерывные величины. Мы должны начертить на бумаге в известном масштабе прямую, представляющую длину, пройденную человеком в один час, или в одну минуту, или в какой-нибудь другой промежуток времени, на котором мы решили остановиться. Таким образом равномерную быстроту ходьбы мы могли передать посредством нанесения точек, соответствующих отдельным часам на клетчатую бумагу. Быстрота движения, или *скорость*, является таким образом непрерывной величиной, которая может быть точно определена, как раньше были определены нами другие величины; при помощи же чисел ее можно было бы описать лишь приблизительно.

§ 4. Переменное движение.

Предположим теперь, что движение не равномерно, и рассмотрим, что в этом случае подразумевается под быстротой движения тела.

Поезд, например, отправляется со станции и в течение нескольких минут движется со скоростью 30 миль в час. Поезд начал с состояния покоя и кончает большой быстротой. Что с ним произошло за это время? Грубо мы уже понимаем, что подразумевают, когда говорят, что в некоторый промежуток времени между двумя моментами поезд должен проходить 15 миль в час или двигаться с какой-нибудь быстротой; попытаемся теперь придать этому понятию несколько большую точность. Предположим, что по рельсам, параллельным тем, по которым движется наш поезд, в том же направлении равномерно, с быстротой 15 миль в час, движется другой, бесконечно длинный поезд. Таким образом в то время, как наш первый поезд находится в покое, второй, проходя мимо него, будет двигаться, как то будут видеть сидящие в первом поезде, со скоростью 15 миль в час. Когда первый поезд тронется, наблюдатель, который сидел в нем, увидит, что второй поезд идет теперь явно гораздо тише, чем раньше, но все же наблюдателю этому будет казаться, что поезд движется вперед. Как только первый поезд прибавит скорости, видимое движение вперед второго начнет постепенно уменьшаться и, наконец, будет казаться, что он идет настолько тихо, что возможно даже переговариваться из одного поезда в другой; это произойдет тогда, когда быстрота первого поезда возрастет приблизительно (но не вполне) до 15 миль в час, что по нашему предположению, представляет постоянную быстроту второго поезда. Но так как быстрота первого поезда не возрастает, то наступит известный момент, когда будет казаться, что второй поезд уже перестает итти впереди первого и начинает отставать. В этот частный момент он не будет ни обгонять первый, ни отставать от него, но будет итти с той же самой быстротой. В такой частный момент первый поезд, как мы должны в силу этого сказать, идет с быстротой 15 миль в час. Но это будет происходить только в данный частный момент, потому что равенство быстроты не продлится даже и доли секунды, как бы мала такая доля ни была; мы увидим, что второй поезд в то самое мгновение, как перестанет обгонять первый, начнет уже от него отставать. Таким образом, эти два поезда в точности рядом не проходят ни малейшего участка пути, ни даже самомалейшей доли дюйма, но в то же время мы должны сказать, что в некоторый частный момент наш первый поезд идет с быстротой 15 миль в час, хотя непрерывно с этой быстротой он не движется даже чрезвычайно малой части времени. Для измерения этой мгновенной скорости нет другого способа, кроме только что описанного, согласно которому рассматриваемое движение сравнивается с некоторым равномерным движением, совершающимся со скоростью, имеющей указанное частное значение.

По поводу этого мы должны сделать следующее весьма важное замечание: быстрота, с какой едет тело, является свойством столь же чисто мгновенным, как и точное положение, занимаемое телом в данный момент. Таким образом, камень, падающий у нас на землю, в тот момент, когда он ударяется об землю, движется с некоторой определенной быстротой, но в предшествующее мгновенье он еще не движется так быстро, так как с этой конечной быстротой он не движется ни малейшей доли секунды. Это соображение во всей полноте усваивается несколько трудно и, благодаря этому, даже приводило многих к мысли о необходимости отбросить гипотезу непрерывности. Мы, однако, можем облегчить себе понимание вопроса, воспользовавшись своим изучением кривой положений; тут, как мы видели, равномерному движению соответствует прямая линия, при чем быстрота движения зависит от крутизны этой прямой.

Предположим теперь, что тело движется в первую секунду чрезвычайно тихо, но равномерно, в следующую секунду равномерно, но несколько быстрее, еще быстрее в третью секунду и так далее. Кривой положений в данном случае будет служить ряд прямых, наклоняющихся все круче и круче и образующих часть многоугольника. С достаточного отдаления этот многоугольник будет выглядеть как кривая линия. Если вместо промежутков времени в одну секунду, в течение каждого из которых быстрота движения считается одинаковой, взять промежутки в десятую долю секунды, то многоугольник будет выглядеть, как кривая линия, хотя бы мы и не отходили так далеко, как раньше, ибо, чем короче длины сторон нашего многоугольника, тем более будет походить он на кривую, и, раз промежутки времени доведены до одной десятой первоначальных, стороны будут составлять по длине одну десятую прежних. Быстрота, с какой движется рассматриваемое тело, когда оно находится в положении, представляемом той или другой точкой многоугольника, получится, если мы продолжим сторону многоугольника, проходящую через эту точку. Быстрота в данном случае будет зависеть от крутизны этой линии, потому что такая прямая, как сторона нашего многоугольника представляет собой равномерное движение, совершаемое телом в течение известного промежутка времени. Когда многоугольник выглядит как кривая, стороны его чрезвычайно коротки, и любая сторона, будучи продолжена в обоих направлениях, будет походить на касательную к кривой.

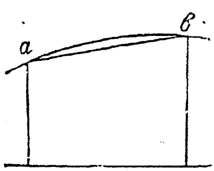
Перейдя теперь к рассмотрению общего случая переменного движения, мы будем теперь иметь, вместо вышесказанного многоугольника, напоминающего собой кривую, настоящую кривую. Разница между этими двумя случаями та, что при рассматривании в достаточно сильный микроскоп многоугольника, походящего на кривую, мы будем в состоянии увидеть его углы; напротив того, при изучении кривой, каким бы мощным микроскопом мы при этом ни пользовались, она будет всегда выглядеть, как кривая. Но одно свойство остается тут и там общим: если мы проведем в какой-нибудь точке кривой касательную, то наклон нашей касательной будет совершенно точно такой же, как и наклон кривой в этой точке, а потому касательная будет показывать быстроту движения, представляемого кривой, совершенно так же, как раньше продолженная сторона многоугольника характеризовала быстроту движения, представляемого многоугольником. Другими словами, мгновенную скорость тела в любом его положении можно узнать при помощи кривой положений, построенной для данного тела; для этого надо только провести касательную к кривой в точке, соответствующей рассматриваемому положению; крутизна касательной укажет нам искомую быстроту, или скорость, потому что сама касательная соответствует некоторому равномерному движению, совершающемуся с той же скоростью, как и переменное движение в данный момент. Этот способ представления быстроты движения делает для нас понятным, почему мгновенная скорость тела, вообще говоря, относится только к известному мгновению, а не сколько-нибудь длящемуся времени, как бы короток взятый промежуток ни был: крутизна кривой непрерывно изменяется по мере того, как мы переходим от одной части кривой к другой,—кривая линия не имеет характера прямой ни для какой части ее длины, хотя бы и чрезвычайно малой.

Таким образом задача определения мгновенной скорости для данного положения сводится к задаче проведения касательной к данной кривой. Мы имеем достаточно ясное общее представление о значении каждого из этих понятий, но представление, достаточное для целей обыденного разговора, является недостаточным для целей умозрения, и потому ему необходимо придать всю точность.

Подобно тому, как раньше мы должны были внести точность в наше представление об отношении двух величин путем определения четвертой пропорциональной или о равенстве двух отношений при помощи обозначения их числами, так и здесь мы должны будем придать точность нашему пониманию скорости, выразив ее при помощи доступных измерений величин, не претерпевающих изменений.

У нас нет средств измерить мгновенную скорость движущегося тела прямо: единственное, что мы можем измерить, это путь, проходимый телом в данный промежуток времени. В том случае, когда тело движется равномерно, его мгновенную скорость, которая все время остается одной и той же, можно вполне определить, если только мы знаем величину пути, пройденного телом в определенное время. При этом, как уже заметили, мы приходим всегда к одному и тому же результату, каков бы ни был промежуток времени. Быстрота „четыре мили в час" однозначуща с быстротой „восемь миль в два часа", или с быстротой „две мили в полчаса" или, наконец, с быстротой „одна миля в четверть часа". Но если тело движется со скоростью, непрерывно изменяющейся, то знание длины пути, на которую подвинулось тело в течение данного промежутка времени, не даст нам никаких указаний относительно мгновенной скорости для какого-либо положения за этот промежуток времени. Если, например, нам скажут, что кто-либо прошел за час расстояние в четыре мили, то эти слова не дадут нам никаких сведений относительно действительной быстроты, с какой это лицо двигалось в любой момент в течение этого часа, если только нам не сообщат, что оно двигалось равномерно. Тем не менее мы обыкновенно говорим, что человек в этом случае двигался *в среднем* с быстротой четырех миль в час. Если мы нашли бы полезным говорить об этой быстроте, как о „средней быстроте", то мы могли бы дать этому понятию следующее общее определение.

Если тело прошло известное расстояние в известное время, то его *скорость в среднем*, или *средняя скорость* будет такова, что, если бы оно двигалось с ней равномерно, то прошло бы то же самое расстояние в то же самое время.

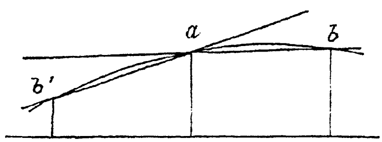


Черт. 93.

Эту среднюю скорость можно весьма просто представить с помощью кривой положений. Пусть a и b две точки, принадлежащие кривой положений (черт. 93); в таком случае средняя скорость на пути между положениями, представленными точками a и b, определяется крутизной прямой линии ab. Это определение, кроме того, позволяет нам внести некоторое усовершенствование в способ вычисления мгновенных скоростей, так как мы показали, что задача о нахождении мгновенной скорости тела, при применении вышеупомянутого метода представления скоростей, сводится к вопросу о проведении касательной к кривой. Средняя скорость тела определяется соотношением величин, измерить которые мы уже можем, так как для этого требуется измерить некоторый промежуток времени и расстояние, пройденное в течение этого промежутка времени; что касается *хорды* кривой, то-есть прямой, соединяющей одну ее точку с другой, то эту линию мы провести в состоянии. Если теперь нам удастся найти какой-либо способ перехода от хорды кривой к ее касательной, то представление, на котором мы остановились, позволит нам перейти от средней скорости к скорости мгновенной.

§ 5. О касательной к кривой.

Предположим теперь, что хорда ab, соединяющая две точки кривой, вращается вокруг точки a, которая остается неподвижной (черт. 94); точка b будет при этом перемещаться по кривой по направлению к a, и если мы предположим, что точка b в своем движении остановится лишь тогда, когда перейдет за a в такую точку, как b', по другую сторону от a, сравнительно с своим первоначальным положением, то хорда, повернувшись, примет положение ab'. Взглянув теперь на кривую, изображенную на нашем чертеже, мы увидим, что касательная к кривой в a, очевидно, лежит между ab и $b'a$. Таким образом, если поворачивать ab вокруг a, переводя эту хорду в положение ab', то в известный момент она должна пройти через положение касательной. Где же находится точка b в тот момент, когда хорда проходит через это положение. Из чертежа мы видим сразу, что эта точка может находиться только в a, и тут мы не имеем возможности придать сколько-нибудь определенное значение прямой, которую описываем, как проходящую через две совпадающих точки.



Черт. 94.

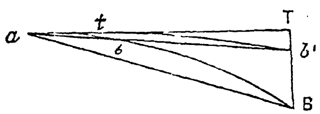
Если бы мы могли это сделать, то определение касательной было бы весьма легко: тогда вместо того, чтобы проводить в a касательную к кривой, мы только и сказали бы: возьмите другую точку b, соедините a и b прямой и заставьте b перемещаться по кривой по направлению к a; положение прямой ab в тот момент, когда b пройдет в a, и будет положением касательной в a.

Тут, однако, возникает затруднение, на которое мы уже указывали, а именно, мы не в состоянии образовать сколько-нибудь определенное понятие о прямой, соединяющей две совпадающие точки: для определения положения прямой необходимы две раздельные точки. Ясно, однако, что, при всей недостаточности точности, в этом определении есть нечто полезное и правильное, ибо, если мы заставим хорду путем вращения перейти из положения ab в положение касательной в точке a, то во время такого движения точка b будет перемещаться по кривой к точке a.

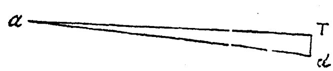
Затруднение это впервые было раз'яснено Ньютоном, который сделал это об'яснение весьма доступным. Суть его об'яснения следующая:

Предположим для простоты, что наша кривая—круг; если прямой прут согнут так, чтобы он стал частью окружности, то величина окружности будет зависеть от размера сгиба. Прут может быть совершенно изогнут в круг так, что концы его соприкоснутся, и тогда он образует весьма небольшой круг. Но можно изогнуть прут очень слабо,—тогда он станет частью чрезвычайно большого круга. Предположим теперь, наоборот, что мы исходим от небольшого круга и придерживая его крепко в одной точке, увеличиваем размеры окружности; таким образом прут, от которого мы зависим, становится изогнутым все меньше и меньше. Когда же окружность становится чрезвычайно большой, каждая небольшая часть ее начинает по форме все более и более приближаться к прямой линии. Круг, значит, обладает тем свойством, что чем больше становятся его размеры, тем прямее он делается, но это свойство в равной мере принадлежит всем кривым, которые нам требуется рассмотреть. Иногда это положение высказывают иначе, говоря, что кривая является прямой в своих элементах, то-есть в самомалейших частях; но под этими словами надо разуметь лишь то, что, чем меньшую часть кривой мы берем, тем прямее она будет выглядеть, если увеличить ее до данной длины.

Приложим теперь эти соображения к задаче об определении положения касательной. Предположим, что в кругу уже проведена касательная at и что на ней отложена некоторая подходящая длина aT (черт. 95); из конца касательной T восстановляем перпендикуляр,



Черт. 95.



Черт. 96.

встречающий окружность в точке B, и соединяем a с B прямой линией. Мы можем теперь рассмотреть движение, совершаемое точкой B вдоль по кругу в то время, как хорда aB будет вращаться вокруг a, переходя в положение aT; трудность, с которой мы тут встречаемся, состоит, очевидно, в том, что фигуры, подобные aBT, уменьшаются (как, например, abt), и это уменьшение продолжается до тех пор, пока оне не станут столь малыми, что их уже нельзя будет разглядеть. Ньютон преодолевает это затруднение, делая предположение, что фигуру каждый раз увеличивают, пока она не достигает некоторого определенного размера. Так, вместо того, чтобы рассматривать меньшую фигуру abt, мы увеличиваем ее во всех направлениях до тех пор, пока сторона at не станет равной своей первоначальной длине aT.

Но часть окружности ab, которой мы теперь интересуемся, меньше прежней части aB; следовательно, когда мы, увеличивая, доведем ее до первоначальной длины (или приблизительно до первоначальной), то нам покажется, что она прямее, чем раньше. Другими словами, в новой фигуре abt, представляющей собой увеличенную фигуру abt, точка b будет лежать ближе к T, чем в прежней фигуре aBT. Следовательно, по мере передвижения b к a хорда ab будет приближаться к касательной aT, или, что то же, угол tab будет уменьшаться. Это последнее заключение достаточно ясно, потому что хорда ab, как мы первоначально предполагали, переходя в положение at, все время совершает вращение.

Важным во всем этом является тот факт, что в увеличенной фигуре мы можем выпрямить кривую, насколько того пожелаем, иначе говоря, мы можем заставить b' подойти к T сколько угодно близко. Если мы отложим от T по направлению, перпендикулярному к aT, какую-нибудь длину, например, Td (черт. 96), то мы всегда будем иметь возможность провести круг, проходящий между T и d; если мы далее провели бы прямую ad, под весьма малым углом к aT, то, тем не менее, всегда возможно будет придвинуть b так плотно к a, что в увеличенной фигуре угол $b'aT$ будет меньше начерченного нами угла daT.

Теперь дадим себе отчет в том, что в действительности означает приведенный нами процесс, прозванный ньютоновым микроскопом. Фигура, которую мы желаем изучить, становится все меньше и меньше и, наконец, совершенно исчезает; мы же предполагаем, что она непрерывно возрастает и таким образом все время сохраняет надлежащие размеры. Далее, у нас движется точка по кривой по направлению к другой точке, и нам надо рассмотреть, что происходит с прямой, соединяющей эти две точки, когда они приближаются друг к другу беспредельно. И вот при помощи нашего микроскопа мы пришли к выводу, что, если взять эти две точки достаточно близко друг к другу, то прямая может приблизиться к положению касательной к кривой в точке a настолько, насколько мы того пожелаем.

Этот вывод дает нам таким образом определение касательной к кривой в зависимости от величин, доступных для измерения. Если в известной точке кривой a проведена прямая at, обладающая тем свойством, что при достаточно близко от a взятой точке b, прямая ab может быть приведена в положение, как угодно близкое к at (другими словами, угол bat может быть сделан менее всякого как угодно малого наперед заданного угла), то at называется касательной к кривой в точке a. Заметим, что все, что, согласно этому определению, должно быть сделано, относится, как мы знаем, к области выполнимого. Весьма малый угол может быть наперед задан; когда такой угол начерчен, можно найти положение такой точки b, чтобы ab образовало с at угол, меньший этого заданного. Предположение здесь находится в зависимости от величин, которые мы уже знаем и можем измерить. В дополнение мы только предполагаем, что как бы заданный угол мал ни был, мы всегда можем найти точку b; если это возможно, то в случае исключительной малости заданного угла прямая ab или at (тут обе оне совпадают) называется касательной.

Попутно следует отметить сходство между этим определением и другим, раньше нами исследованным, именно определением четвертой пропорциональной или равенства отношений. Пользуясь этим определением, мы предполагали, что наперед задана известная дробь, при чем раз первое отношение больше этой дроби, то и второе отношение больше той же дроби, если же первое отношение меньше ее, то и второе—меньше.

Вопрос о том, больше ли эти отношения, чем заданная дробь, или меньше, принадлежит к числу тех, которые решаются посредством измерения и сравнения. Далее затем мы сделали еще одно предположение, а именно, что, какова бы ни была наперед заданная дробь, заключение, сделанное нами, касающееся отношений, остается попрежнему в силе; тогда мы сказали, что эти отношения равны. В обоих этих определениях (определении, относящемся к касательным, и определении равенства отношений) затруднительным представляется то обстоятельство, что мы расширяем предположение, относящееся к частному случаю, и придаем ему характер всеобщности. В самом деле, мы допускаем, что некоторое положение, справедливость которого можно весьма легко испытать и подтвердить в каком-либо отдельном случае, справедливо и для бесконечно большого числа случаев, по отношению к которым оно не подвергается проверке. Но, с другой стороны, хотя на практике нельзя производить испытание по отношению к каждому отдельному случаю, справедливость высказанного положения по отношению к любому отдельному случаю установлена, мы знаем по основаниям, оправдываемым рассудком, что положение это будет удовлетворяться и вообще. Поэтому, найдя в этом сознании уверенность в правильности положения, мы в состоянии рассуждать о равенстве отношений и о касательных к кривым вообще.

Переведем теперь определение, к которому мы таким образом пришли, с языка кривых и касательных на язык мгновенных и средних скоростей. Наклон хорды кривой положений передает среднюю скорость, а наклон касательной такой кривой в какой-либо либо ее точке—мгновенную скорость в этой точке. Когда мы заставляем точку b все более и более приближаться к точке a, то процесс этот соответствует последовательному уменьшению выбираемого нами для рассмотрения промежутка времени, идущего за тем моментом, мгновенную скорость для которого мы разыскиваем.

Предположим, что скорость какого-нибудь тела, например, поезда, есть скорость переменная и что нам надо найти ее значение для данного момента. Взяв среднюю скорость для часа, следовавшего за этим моментом, мы могли бы получить весьма грубое приближение к искомой величине; в некоторых случаях мы не получили бы даже и приближения. Более близкое приближение мы нашли бы, взяв среднюю скорость для минуты, следовавшей за этим моментом, так как в этом случае мгновенной скорости представлялось меньше времени для изменения. Еще более близкое приближение получилось бы у нас, если бы мы взяли среднюю скорость для последующей секунды. Мы должны прийти к заключению, что для всех движений мы можем найти сколько угодно близкое приближение, взяв достаточно малый промежуток времени. Другими словами, если мы выберем какую-нибудь чрезвычайно малую скорость, например, такую, при которой тело, двигаясь равномерно, проходило бы один дюйм в столетие, то, взяв достаточно малый промежуток времени, можно достигнуть того, что средняя скорость будет разниться от мгновенной на величину, меньшую только что сказанной скорости. Итак, в конце концов, мы будем иметь для мгновенной скорости следующее определение: если имеется некоторая скорость, к которой может, как угодно, приблизиться средняя скорость, относящаяся к промежутку времени, следующему за данным моментом (для чего мы только должны взять промежуток достаточно малым), то такая скорость называется мгновенной скоростью тела в данный момент.

Таким путем мы свели задачу о нахождении скорости движущегося тела в какой-либо момент на задачу о проведении касательной к относящейся к рассматриваемому движению кривой положений в соответственной точке последней. То, что доказано нами, может быть равным образом передано следующими словами: если положение тела задается в зависимости от времени при помощи некоторой кривой, то скорость тела будет определяться в зависимости от времени при посредстве касательной к этой кривой.

Существует много кривых, касательные к которым можно провести при помощи простых геометрических приемов: таковы, например, такие кривые, как эллипс, парабола, так что в тех случаях, когда кривая положений тела представляет собой как раз одну из таких кривых, мы всегда в состоянии найти при помощи геометрического построения скорость тела в любой момент.

Так, в случае падения тела, *кривой положений* будет парабола: при помощи известных свойств касательной параболы мы можем найти, что скорость в этом случае пропорциональна времени. Но в огромном большинстве случаев задача о проведении касательной к кривой положений столь же трудна, как и первоначально данная задача об определении скорости движущегося тела, так что во многих случаях на практике мы даже, наоборот, разрешаем первую задачу при помощи последней [1].

[1]) Этот метод предложен Робервалем (1602—1675). *К. П.*

§ 6. Об определении переменной скорости.

Что составляет в каждом случае действительный предмет разысканий, можно выяснить путем рассмотрения задачи, нами уже упомянутой,—задачи о теле, падающем по прямой линии. На основании опытов Галилея мы знаем, что все расстояние, пройденное падающим телом из положения покоя до некоторого момента, пропорционально квадрату времени.

Действительно, для получения этого расстояния в футах мы должны умножить число секунд само на себя, и полученный результат—на число, немного большее шестнадцати. Так, например, в пять секунд тело пройдет число футов несколько большее, чем произведение двадцати пяти на шестнадцать, т.-е. несколько больше 400 футов. Нам нужно было бы теперь найти некоторый прямой процесс, позволяющий установить, что, при пропорциональности проходимых телом расстояний квадратам расстояний, скорость будет всегда пропорциональна времени. Так, в настоящем случае мы могли бы найти скорость в конце данного числа секунд, умножая это число на тридцать два; по истечении пяти секунд скорость тела будет поэтому равняться 160 фут. в секунду [1]).

---

[1]) Мы можем доказать, что это верно, следующими соображениями. Пусть a путь, пройденный телом в течение t секунд, считая от момента выхода из состояния покоя, b путь, пройденный телом в $t+t'$ секунд; таким образом t' секунд—это промежуток, выбранный нами для определения средней скорости. Согласно закону, только что нами приведенному,

$$a=16t^2$$

(a футов тело прошло в t секунд); равным образом $b=16(t+t')^2=16(t^2+2tt'+t'^2)$.

Отсюда находим:
$$\begin{aligned} b-a &= 16(t^2+2tt'+t'^2)-16t^2= \\ &= 16(2tt'+t'^2)= \\ &= 16t'(2t+t'), \end{aligned}$$

что дает нам расстояние, пройденное в течение промежутка времени t' секунд. Но средняя скорость в течение этого промежутка времени получается путем разделения пройденного пути на время затраченное на прохождение этого расстояния; отсюда в нашем случае средняя скорость для промежутка времени в t' секунд, следовавших непосредственно за первыми t секундами, равняется

$$\begin{aligned} &\frac{b-a}{t'}= \\ &=\frac{16t'(2t+t')}{t'}= \\ &=32t+16t'. \end{aligned}$$

Если мы теперь обратим внимание на полученное нами значение средней скорости, то увидим, что оно состоит из двух членов. Первый из них, а именно $32t$, совершенно не зависит от взятого нами промежутка времени t', второй же член ($16t'$) прямо зависит от него и потому при изменении промежутка времени изменится и сам. Но расстояние, проходимое в секунду и представленное у нас $16t'$ футами, может быть сделано как угодно малым посредством выбора достаточно малого t'. Таким образом средняя скорость в течение t' секунд, следующих непосредственно за данным моментом, может быть сделана сколь угодно близкой к величине $32t$ футов в секунду, для чего довольно только взять достаточно малое t'. Возвращаясь к нашему определению мгновенной скорости, мы теперь ясно видим, что мгновенная скорость нашего падающего тела по истечении t секунд равна 32 футам в секунду.

В настоящее время мы обладаем таким разработанным методом нахождения скоростей (простой пример его приложения дан в примечании); если мы знаем алгебраическую формулу, указывающую нам, как вычисляется пройденный путь в зависимости от времени, то, исходя из такой формулы и пользуясь сказанным методом, мы можем найти другую алгебраическую формулу, которая покажет нам, как вычислить в зависимости от времени скорость. Вот один из результатов приложения этого процесса: если путь, пройденный телом, представляется в любой момент произведением n—ой степени времени на a, то скорость в некоторый момент представится произведением $(n-1)$ой степени времени на na. При помощи этого-то процесса изменение одной формулы и получение другой и были на практике разрешены те две задачи, которые, как мы показали, друг другу равнозначущи.

Есть еще одна задача, имеющая чрезвычайно важное значение для изучения явлений природы; ее можно поставить в зависимость от сказанных двух задач. При движении точки по прямой линии расстояние точки от некоторой определенной точки, взятой на той же прямой, есть величина, изменяющаяся во времени. Быстрота изменения этого расстояния та же, что и скорость движущейся точки, и быстрота изменения всякой непрерывной величины может быть надлежащим образом представлена только при помощи скорости точки.

Так например, высота прилива в определенной гавани будет изменяться, будет неодинакова в различное время дня; она может быть определена по некоторому указателю, движущемуся вверх и вниз по стержню. Быстрота изменения высоты прилива будет, очевидно, та же, что скорость, с какой этот указатель движется вверх и вниз. Другим примером может служить изменение давления атмосферы, определяемого по высоте ртутного барометра. Быстрота изменения давления, очевидно, та же, что и быстрота, с какой поверхность ртути движется вверх и вниз. Каждый раз, когда у нас явилась бы потребность описать изменения, претерпеваемые какой-либо величиной в зависимости от времени, мы могли бы сделать это, правда, грубо и приближенно, приготовив соответственную таблицу. Однако это был бы путь весьма затруднительный; настоящим же путем для описания таких изменений будет построение кривой, у которой *абцисса* каждой точки, или ее расстояние, отсчитываемое по горизонту, представляет время, а высота, или *ордината* кривой в той же точке показывает значение для данного времени изучаемой величины (см. стр. 142). Когда бы изменения ни происходили, мы на практике исходим из предположения, что изменение величины представляется некоторым движением точки по кривой. Величина равноценным образом может быть представлена только посредством некоторой длины, отложенной на прямой и пропорциональной данной величине.

Поэтому, если величина будет изменяться, то изменяться будет и отложенная нами длина, а следовательно, конец этой длины будет двигаться по кривой. Быстрота, с какой изменяется наша величина, будет быстротой движения точки. Когда же значения величины, относящиеся к различным моментам времени, переданы расстояниями точек кривой, отсчитанными по перпендикулярам к прямой, представляющей время, то быстрота изменения величины будет определяться при помощи касательных к нашей кривой.

§ 7. О способе флюксий.

Итак, пред нами три задачи, практически сводящиеся к одной и той же задаче. В первой задаче надо найти скорость движущейся точки, зная, где находится точка в каждый момент; во второй—требуется провести касательную к какой-либо кривой в той или другой ее точке; в третьей—надо найти быстроту изменения величины, зная, каковы размеры последней в каждый момент. Решение всех этих задач возможно с помощью указанного уже нами процесса, пользуясь которым мы выводим из алгебраической зависимости, служащей нам для нахождения по времени самой величины, другую зависимость, служащую для нахождения по времени быстроты изменения величины.

Этот особенный процесс—выведение одной алгебраической зависимости из другой—был исследован Ньютоном; изменяющуюся величину он обыкновенно называл *флюэнтой*, а быстроту ее изменений—*флюксией* величины. Благодаря этому, и весь способ решения наших задач посредством процесса вывода одной алгебраической зависимости из другой был назван *способом флюксий.*

Быстрота изменения величины, вообще говоря, будет от времени до времени сама изменяться; но если мы рассматриваем промежуток времени очень малый по сравнению с тем, какой требуется для сколько-нибудь значительного изменения величины, то мы можем с полным правом предположить, что за это время сказанная быстрота значительно не изменилась. Практически такое предположение равносильно допущению, что закон изменения был действительно один и тот же в течение этого промежутка, и что быстрота изменения все время не отличалась очень значительно от ее среднего значения. Но средняя быстрота изменения величины в течение некоторого промежутка времени есть не что иное, как частное, получающееся от разделения разности между значениями этой быстроты в начале и в конце на самый промежуток. Если какая-нибудь длина возросла за секунду на один дюйм, то независимо от того, возрастала ли она равномерно или даже вообще возрастала ли она все время, ее средняя быстрота возрастания в течение этой секунды равнялась одному дюйму в секунду. Но если быстрота возрастания изменяется медленно, то можем с полным правом допустить, как приближение, что быстрота эта постоянна в течение секунды и потому равна средней быстроте; мы знаем, что чем меньше промежуток времени, тем меньше ошибка, происходящая от такого предположения. Таким-то путем и создался в действительности процесс, посредством которого из зависимости, служащей для вычисления положения, получается зависимость, служащая для вычисления скорости. Разность между двумя расстояниями движущейся точки, отсчитанными от некоторой определенной точки на прямой, разделяется на промежуток времени между двумя моментами, соответствующими этим положениям; это и дает нам среднюю быстроту изменения в течение рассматриваемого промежутка. Если мы будем этот промежуток все уменьшать и найдем, что при этом средняя величина изменения приближается все больше и больше к известному значению, то мы заключим отсюда, что такое значение является действительной быстротой изменения; при этом мы доводим путем предполагаемого уменьшения промежутки времени до мгновения, и таким образом, получаем то, что мы называем мгновенной быстротой изменения.

Так как в рассуждении, приводящем нас к процессу нахождения одной зависимости при помощи другой, приходится пользоваться двумя разностями [1]), то процесс этот сначала на континенте, а потом также в Англии, получил название *дифференциального исчисления*. Название это неудачно, так как вычисляемая быстрота изменения не имеет ничего общего с разностями; единственную связь с разностями мы находим лишь в том, что они упоминаются в рассуждении, с помощью которого производится процесс. Как бы то ни было задачей дифференциального исчисления, или способа флюксий (мы предпочитаем это последнее название), является разыскание по данной зависимости, служащей для вычисления другой зависимости, быстроты изменения величины. И мы уже видели, что, когда это сделано, тем самым разрешены были также и задачи о проведении касательной к кривой и об определении скорости движущейся точки.

§ 8. О соотношении между величинами (о функциях).

Но мы располагаем правилами не только для вычисления значения величины в какое-либо время, но и для вычисления одной величины при помощи другой совершенно независимо от времени. Примером первой группы зависимостей может служить выше упомянутое определение высоты прилива. Мы можем либо написать формулу, которая позволит нам вычислить эту высоту для данного мо-

[1]) Differentia—разность.

мента, либо вычертить кривую, представляющую ту же величину в различное время дня. Хорошим примером зависимости второго рода может быть зависимость давления данного количества газа от об'ема газа в предположении, что температура остается все время постоянной. Алгебраическое выражение этой зависимости между двумя величинами приводит нас к тому, что одна величина изменяется обратно пропорционально другой, или, что приведение чисел, их представляющих, постоянно. Так если мы сожмем какую-нибудь массу воздуха до половины его первоначального об'ема, то давление возрастает вдвое, или будет равно, как говорят, двум „атмосферам". Если мы сожмем газ до одной пятой его начального об'ема, то давление увеличится в пять раз или до пяти атмосфер.

Если мы пожелаем представить эту зависимость на чертеже, то мы начертим кривую, у которой абсциссы, или расстояния, откладываемые по горизонтальной линии от некоторой исходной точки, будут представлять значение об'ема, а вертикальные линии, проведенные в концах таких абсцисс,—давления. Для какой-нибудь определенной температуры кривая, вычерченная концами линий, представляющих давления, будет гиперболой, у которой одна из асимптот горизонтальна, а другая вертикальна; для различных температур у нас получатся различные гиперболы, но асимптоты их будут одни и те же. Таким образом каждая точка плоскости будет передавать то или другое определенное состояние тела, так как через каждую точку можно провести гиперболу. Абсцисса точки представляет об'ем, ее расстояние до горизонтальной прямой—давление; сама же гипербола, на которой она лежит, будет указывать температуру. В данном случае мы имеем пример важности для целей физики понятия о *семействе кривых*, о которых мы упоминали в предыдущей главе (см. стр. 128).

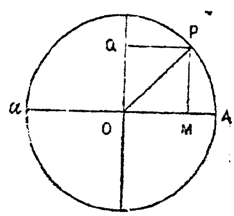
Если связь между двумя величинами надо найти при помощи действительного наблюдения, то это достигается посредством соответственным образом выполненного нанесения на бумагу точек (как в § 11, главы IV), передающих наши последовательные наблюдения. Так, при изучении свойств воздуха мы будем наблюдать давление его при различных значениях его об'ема. Каждой паре таких значений будет соответствовать точка, нанесенная на плоскость; когда будет нанесено достаточное число таких точек, то глазу будет ясно, что все эти точки, грубо говоря, лежат на кривой гиперболической. Следует отметить, что этот результат по своей грубости верен лишь приблизительно: наблюдения никогда не бывают настолько точны, чтобы при проведении кривой через точки не пришлось ее проводить очень свободно. Но как только геометр усмотрел в кривой ее гиперболическую форму, тотчас же он узнает, что тут изменение давлений обратно пропорционально об'емам.

Здесь у нас соотношение между двумя величинами выражено при посредстве кривой. Всякий раз как две величины связаны друг с другом так, что раз дана одна из них, другая может быть вычислена или найдена, то каждая из таких величин называется *функцией* другой. Можно предположить, что функция задана или алгебраической зависимостью, или некоторой кривой. Таким образом мы можем сказать, что для нахождения давления, соответствующего данному об'ему, надо разделить некоторое число на число, представляющее об'ем, тогда в результате получится число единиц давления. Мы можем также сказать, что надо восставить перпендикуляр из данной точки на горизонтальной прямой (точки, представляющей об'ем) и продолжить его до пересечения с кривой и что тогда эта ордината (отрезок перпендикуляра между кривой и горизонтальный прямой) представит давление. Таким образом мы установили связь между двумя дисциплинами—геометрией и учением о числе: соотношение между двумя величинами, например, между об'емом и давлением, у нас выражено при помощи известной кривой.

Но обнаруженная связь между двумя науками всякий раз служит на пользу как одной, так и другой. Раз наличность такой связи установлена, мы можем пользоваться, с одной стороны, теми или другими теоремами о величинах для исследования характера кривых (это в сущности и есть метод координат, предложенный Декартом), с другой же стороны, можем применять известные геометрические свойства кривых для отыскания теорем о зависимости одних величин от других. Для разрешения первой задачи соотношение между двумя величинами рассматривается, как уравнение. Таким образом, вместо того, чтобы сказать, что давление изменяется обратно пропорционально об'ему, мы предпочтем сказать, что произведение давления и об'ема равно некоторой постоянной, при условии, что температура остается неизменной. Или, пользуясь для выражения соотношений только геометрическим языком, мы сказали бы, что для каждой точки рассматриваемой кривой произведение абсциссы на ординату равно некоторой определенной величине, что можно написать для краткости так:

$$xy = c^2,$$

и из этого уравнения можно уже вывести все свойства гиперболы.



Черт. 97.

Но мы можем также воспользоваться свойствами известных кривых для изучения характера зависимости одной величины от другой. Таким образом PM, расстояние точки круга P от некоторого определенного диаметра OA, равного a, есть величина, отношение которой к радиусу OP зависит известным образом от размеров угла POA или, что то же самое, от длины дуги *AP*. Это отношение представляет собой в сущности то, что мы назвали синусом угла и что иногда называют синусом дуги. Если сделать дугу *AP* прямо пропорциональной времени или, что то же, если заставить точку *P* двигаться равномерно по кругу, то длина прямой *PM* будет представлять расстояние от центра точки *Q*, совершающей колебания по закону, определяемому этим геометрическим построением. С таким частным случаем колебательного движения, называемым *простым гармоническим движением*, мы встречаемся при изучении возмущений, производимых в воздухе звуком, в эфире—светом, а также тогда, когда упругое тело приходит в состояние дрожания. Соотношения, подобные только что упомянутым соотношениям между дугами круга и прямыми линиями, проведенными при помощи простых построений в круге, приводят нас к тому, что часто называют *круговыми* функциями.

Так тригонометрические соотношения, рассмотренные нами в § 7 главы IV, представляют собой функции этого рода.

Имеются также *гиперболические* функции, состоящие приблизительно в такой же зависимости от гиперболы, как круговые функции— от круга и *эллиптические* функции, названные так потому, что с их помощью можно вычислять длины дуги эллипса.

Но наиболее ценный метод для изучения свойств функций дают нам те соображения, которыми мы занимались в этой главе, то-есть соображения о быстроте изменения величин. Если мы знаем соотношение между двумя величинами, то отношение быстроты изменения одной из них к быстроте изменения другой может быть найдено при помощи известного алгебраического процесса.

Мы показали, что задача о нахождении этого отношения сводится, в конце-концов, к тому же, что и задача о проведении касательной к кривой, выражающей связь между первоначально данными величинами. Так, в случае, нами только что рассмотренном, где произведение двух величин было постоянным (или, что все равно, где одна величина изменялась обратно пропорционально другой, то-есть в то время, как одна величина убывала, другая, ясно, должна была возрастать), найдено, что отношение быстрот изменения величин равно отношению самих величин. Таким образом быстрота изменения об'ема газа так относится к быстроте изменения его давления (при условии, что температура все время поддерживается постоянная), как об'ем относится к давлению, при чем мы все время не упускаем из виду, что возрастание одной из этих величин обусловливает убывание другой.

Рассмотрение такого отношения быстрот изменения является весьма важным при определении одного из основных изменяющихся свойств тел, а именно их *упругости*. Упругость газа мы определяем как такое изменение давления, которое способно произвести данное *сжатие*, при чем под термином сжатие разумеется здесь отношение изменения об'ема ко всему первоначально данному об'ему до его изменения. Так, если об'ем газа уменьшился на один процент, то мы говорим, что он претерпел сжатие в $\frac{1}{100}$. Если, согласно нашему определению, мы разделим давление, необходимое для произведения этого сжатия на $\frac{1}{100}$, или, что все равно, умножим его на 100, то получим то, что называется упругостью. В нашем случае частное от разделения изменения давления на все первоначальное давление равно тому, что мы назвали теперь сжатием, то-есть $\frac{1}{100}$; поэтому изменение давления равно $\frac{1}{100}$ первоначального давления. Но мы только что показали, что упругость в 100 раз больше изменения давления, необходимого для того, чтобы произвести рассмотренное сжатие, а потому равна первоначальному давлению. Следовательно, упругость газа измеряется давлением газа.

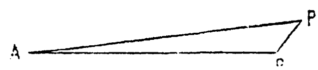
§ 9. Об ускорении и годографе.

Теперь мы будем рассматривать быстроту изменения любой измеряемой величины, как другую величину, найти которую мы можем. К определению нашей быстроты мы пришли, рассматривая скорость движущейся точки. В простейшем случае, когда точка движется по прямой, быстрота ее перемещения равна быстроте изменения ее расстояния от некоторой определенной точки этой прямой. Но в общем случае, когда точка движется не по прямой, но по некоторого рода кривой, мы не дадим полного описания характера движения, если только скажем, как быстро точка движется,—необходимо еще в добавление указать, в каком направлении она движется. Отсюда следует, что мы должны не только измерять величину скорости, но должны определять скорость и со стороны ее качественной, а именно — указывать ее направление. Теперь мы и в самом деле попробуем изучить эти две стороны за раз; метод, при помощи которого мы это будем выполнять, является, быть-может, одним из самых могущественных орудий, благодаря которым в последнее время была расширена область точного знания. Определяя скорость движущейся точки, как быстроту изменения ее положения, мы встретились с вопросом, что такое положение?

На этот вопрос мы ответили в предыдущей главе. Положение движущейся точки определено, когда мы знаем вектор, соединяющий ее с некоторой неподвижной точкой. Если скорость движущейся точки означает быстроту изменения положения этой точки и если положение определяется при помощи вектора, приводящего нас из некоторой неподвижной точки к движущейся точке, то для уразумения понятия скорости мы должны составить себе ясное понятие о том, что подразумевается под быстротой изменения вектора.

Вернемся на время назад и рассмотрим более простой случай,— случай движения точки по прямой. Ее положение определяется при помощи вектора AP (черт. 98), идущего из точки A, которая занимает закрепленное за ней положение на прямой, к движущейся точке P. Этот вектор, по мере того, как точка движется, изменяется; таким образом, когда точка приходит в P', вектор изменился из AP в AP'. Как же произошло это изменение вектора? Ясно, что тут

Черт. 98.



Черт. 99.

к первоначальному вектору AP был прибавлен новый вектор PP', и мы определим скорость P, если скажем, с какой быстротой произошло это прибавление.

Перейдем теперь опять к общему случаю. У нас имеется неподвижная точка A; положение движущейся точки P определяется посредством вектора AP. При передвижении P изменяется и этот отрезок, так что, когда P приходит в P', наш вектор делается равным AP'; поэтому очевидно, что он изменился не только по величине, но и по направлению. Такое изменение могло произойти лишь путем прибавления к первоначальному вектору AP нового вектора PP'; совершенно ясно, что если мы отправимся из A в P, а затем из P в P', то результат получится точно такой же, как если бы мы прошли прямо из A в P'. Но тут возникает вопрос: с какой быстротой происходило это прибавление, или, иначе говоря, как велик был вектор, прибавляемый в секунду к первоначальному положению? Ответ будет представлен величиной, имеющей также характер вектора, т.-е. такой величиной, у которой имеется не только известный размер, но и направление.

Мы поэтому скажем, что изменение быстроты вектора представляется известным числом футов в секунду, взятых в определенном направлении.

Итак, подводя итог сказанному, мы устанавливаем, что скорость движущейся точки есть быстрота изменения вектора, которым определяется положение. Для того, чтобы правильно описать эту скорость, надо провести прямую данной длины в данном направлении, при этом мы замечаем, что быстрота изменения некоторой величины, имеющей направление, есть также величина, имеющая направление. Последнее замечание крайне важно, и мы теперь воспользуемся им при рассмотрении самой скорости.

Если точка движется по прямой равномерно, то скорость ее все время одна и та же как по величине, так и по направлению; следовательно, прямая, проводимая для представления ее, все время движения остается неизменной. Если точка движется равномерно по кругу, то скорость ее, оставаясь одной и той же по величине, непрерывно изменяется по направлению: прямая, изображающая эту скорость, будет таким образом иметь одну и ту же длину, она будет все время поворачиваться для того, чтобы остаться параллельной направлению движения перемещающейся точки. Наконец, и в самом общем случае движения точки по кривой какого бы то ни было рода, допустим, что у нас будет проведена через другую точку, остающуюся неподвижной, прямая, представляющая скорость движущейся точки (в последовательных ее положениях) по величине и по направлению. Так как скорость движущейся точки будет, вообще говоря, изменяться, то наша прямая будет также изменяться по величине и по направлению, и конец ее опишет также род кривой. Таким образом, в случае равномерного кругового движения, где скорость все время постоянна, конец прямой, представляющей скорость, как это ясно, будет описывать круг; в случае тела, брошенного вверх, конец соответствующей прямой опишет, как это может быть найдено, вертикальную прямую. Такую кривую, описанную концом прямой, представляющей собой скорость точки в каждый момент, можно рассматривать, как карту движения, и по этой-то причине Гамильтон и дал ей название *годограф* [1]). Если мы знаем путь движущейся точки, а также годограф движения, то мы можем найти скорость движущейся точки для каждого отдельного положения на ее пути. Для этого нам только надо будет провести через начало годографа (неподвижную точку) прямую, параллельную касательной к пути движущейся точки для данного ее положения; длина этой прямой покажет быстроту движения, или скорость точки, при прохождении ее через сказанное положение на ее пути. Гамильтон показал, что для орбит, описываемых планетами при их движении вокруг солнца, годографом будет всегда круг. Годограф в этом случае обладает другими интересными свойствами: так, например, количество света и тепла, получаемого планетой за известный промежуток времени, пропорционально длине дуги годографа между двумя точками, соответствующими началу и концу этого промежутка.

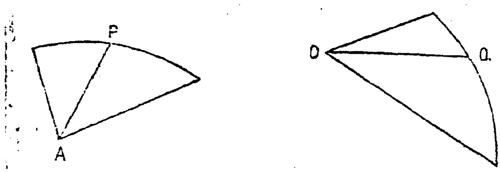
Но главную пользу приносит годограф тем, что дает нам ясное понятие о быстроте изменения скорости. Эта быстрота изменения скорости называется *ускорением*. Не следует, однако, думать, что под ускорением всегда подразумевается *возрастание* скорости; в данном случае, как и во многих других, математики лишь остановились на одном слове, говорящем об изменениях, которые могут совершаться в самых различных направлениях: так, например, та величина, на которую скорость убавляется, называется отрицательным ускорением.

---

[1]) Ὀδός (годос, греч.)=путь.

Этот способ выражения, на первых порах кажущийся несколько сбивчивым, потом, когда с ним осваиваются, не только не вносит сбивчивости, но оказывается полезным. Скорость может быть изменена по величине без изменения ее направления,—другими словами, изменение может произойти от прибавления скорости, ей параллельной. В этом случае мы говорим, что ускорение происходит в направлении движения. Но скорость может также изменяться по направлению, не изменяя своей величины; мы видели, что в таком случае годографом служит круг. Скорость изменяется здесь посредством прибавления к ней скорости перпендикулярной, потому что касательная к кругу в каждой точке его перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания; мы можем сказать, что в данном случае ускорение перпендикулярно к направлению движения. Вообще же говоря, скорость может изменяться одновременно и по величине и по направлению, и тогда мы увидим, что ускорение не совпадает с направлением движения и не перпендикулярно к нему, но занимает некоторое промежуточное направление между сказанными двумя направлениями.

Если мы станем рассматривать движение, совершаемое по годографу концом прямой, представляющей скорость, то увидим движение точки, положение которой определяется вектором, проведенным к ней из центра годографа. Но этот вектор есть не что иное, как скорость точки P на первоначально данной кривой, так как прямая OQ (черт. 100), по предположению, представляет в каждое мгновение скорость точки P по величине и по направлению. Мы уже видели, что быстрота изменения вектора, идущего из неподвижной точки A в P, есть быстрота P; так как OQ — вектор, ведущий из неподвижной точки O в точку Q, то быстрота изменения вектора OQ представит собою скорость точки Q. Но OQ представляет собою скорость точки, находящейся в P, а потому отсюда следует, что скорость точки Q, описывающей годограф, есть быстрота изменения скорости P, т.-е., другими словами, ускорение движения P. Ускорение—это скорость точки Q; всякая же скорость, как мы видели, принадлежит к числу величин векториальных, отсюда прямо следует, что ускорение есть вектор, или величина, имеющая направление.



Черт. 100.

При изменении величины и направления скорости движущейся точки мы можем рассматривать этот процесс, как производимое нами (что имеет место на самом деле), прибавление известного рода скорости с известной быстротой.

Когда мы бросаем вверх камень под острым углом к горизонту и затем он падает вниз, то путь, им описанный, будет параболой.

Тут движение камня, вначале направленное наискось вверх, затем изменяло свое направление, становясь горизонтальным и, наконец, постепенно все более и более заметно направлялось вниз. В действительности же все время непрерывно с одной и той же быстротой прибавлялась скорость, направленная вниз по прямой, так что начальная скорость камня складывалась со скоростью, направленной по отвесу вниз, возрастая с быстротой тридцати двух футов в секунду. В этом случае мы говорим, что ускорение или быстрота изменения скорости камня в одну секунду постоянна, направлена по отвесу вниз и равна тридцати двум футам в секунду.

Если мы привяжем какую-либо вещь к концу нити и приведем ее, держа нить за другой конец, во вращательное движение, то мы будем при этом непрерывно сообщать нашей вещи скорость, направленную по нити к тому концу ее, который находится у нас в руке; так как скорость вращающегося тела перпендикулярна к направлению нити, то прибавляемая скорость всегда перпендикулярна к существующей в любой момент скорости этого тела. Таким образом, скорость планеты во время хода ее вокруг солнца непрерывно увеличивается по направлению к солнцу, или, иначе говоря, ускорение всегда направлено по прямой, соединяющей планету с солнцем. Добавим еще, что в этом случае ускорение (как это было найдено) изменяется обратно пропорционально квадратам расстояния тела от солнца.

§ 10. О законах движения.

Эти примеры подготовляют нас к пониманию того закона движения, который составляет основу всего точного изучения физических явлений. Пусть тело движется; рассмотрим, что при этом зависит от разных условий, разумея под такими „условиями“ положение по отношению к данному телу других тел в известное мгновение, а также состояние нашего тела в известное мгновение, независимо от его движения. В первую минуту мы склонны сказать, что от таких условий зависит скорость данного тела, но достаточно самого непродолжительного размышления для того, чтобы увидеть, что тело при одних и тех же обстоятельствах может двигаться с самыми различными скоростями. Так, например, камень на известной высоте над поверхностью земли может двигаться либо вверх, либо вниз, либо по горизонтальному направлению, либо под каким-нибудь наклоном к горизонту, обладая во всех этих случаях какой угодно скоростью: в предположении движения этого рода нет ничего противоречащего наблюдаемому в природе. Одно мы найдем: как бы камень ни двигался в том или другом положении, быстрота изменения его скорости в секунду остается одна и та же, а именно: тридцать два фута в секунду, считая это изменение вниз по отвесу. Когда мы толкаем вперед кресло на льду, то при описании всех обстоятельств этого движения мы должны указать на сокращение мускулов, прижимающих к креслу наши руки, но быстрота движения кресла зависит от этого сокращения мускулов: толчок определенной силы может вывести кресло из состояния покоя, может ускорить его движение, если оно движется медленно, или, наконец, может поддерживать известную значительную быстроту движения.

Но что же в таком случае зависит от данных обстоятельств? Отвечая на этот вопрос, мы найдем, что будет ли сообщен толчок определенного размера по одному из указанных направлений или по какому-нибудь другому направлению, результатом его во всех случаях явится, очевидно, изменение быстроты движения кресла, при чем такое изменение быстроты будет каждый раз зависеть от размеров толчка. Отсюда следует, что быстрота изменения скорости или ускорение кресла, зависит от некоторых обстоятельств, и такими обстоятельствами являются отчасти сокращение наших мускулов, отчасти трение льда; первое условие способствует возрастанию скорости в том направлении, в котором перемещается кресло, второе уменьшает эту скорость.

Закон движения, о котором мы только что упомянули, может быть высказан в такой форме: ускорение тела, или быстрота изменения его скорости, зависит в каждое мгновение от положения, занимаемого по отношению к нашему телу окружающими телами, но не от быстроты, с какой перемещается само тело. Эта зависимость сказывается при следующих двоякого рода обстоятельствах. В одних случаях, как при подталкивании рукой кресла, изменение скорости зависит от сжатия тел, приводимых в соприкосновение; в других случаях, как при движении планет, ускорение стоит в зависимости от взаимного расположения тел, находящихся друг от друга на расстоянии.

Ускорение, получаемое телом благодаря наличности той или другой совокупности окружающих обстоятельств, должно в каждом отдельном случае определяться при помощи опыта. В настоящее время опыты привели нас к познанию некоторого общего закона, значительно упрощающего исследование, какое мы должны были бы с указанной целью произвести. Закон этот гласит следующее: если присутствие некоторого тела (при чем других тел нет) сообщает движению данного тела известное ускорение и если присутствие другого тела (когда, кроме него и данного тела, других тел нет) обусловливает другое ускорение, то при одновременном нахождении таких двух тел ни одно из них, вообще говоря, не производит каких-либо изменений в ускорении, обусловливаемом другим. Иначе говоря, полное ускорение движущегося тела в этом случае слагается из совокупности двух простых ускорений. Но ускорения суть величины, имеющие направление: поэтому для нахождения результата взаимного совмещения друг с другом двух групп внешних условий достаточно сложить простые ускорения так, как мы складывали векторы в § 3 предыдущей главы.

Хотя этот важный закон природы чрезвычайно упрощает изучение движения *одного и того же* тела под влиянием различных внешних тел, однако он не дает нам ничего, когда приходится иметь дело с движением *различных* тел в тех же окружающих условиях. Но этот случай в широкой мере предусматривается другим многообъемлющим законом, который мы также познали из опыта.

Этот третий, всюду сохраняющий свое значение закон движения может быть формулирован так: отношение ускорений, сообщаемых одним телом другому при взаимном влиянии их друг на друга, есть величина постоянная, совершенно независящая от того, какой именно физический характер имеет это влияние. Другими словами, под влиянием чего бы два тела ни действовали друг на друга, соприкасаются ли они друг с другом, связаны ли они нитью или, находясь на расстоянии, все же взаимно изменяют друг у друга скорости, названное отношение остается во всех указанных случаях, а также во всех других случаях одним и тем же.

§ 11. О массе и силе.

Посмотрим теперь, как этот закон прилагается. Положим, что мы приняли какое-нибудь тело P за образец, взяли какое-нибудь другое тело Q и определяем затем отношение ускорений, какие они будут сообщать друг другу путем взаимного влияния в наиболее простых, насколько это возможно, условиях. Допустим, что из опыта мы нашли для такого отношения значение m; иначе говоря, m выражает отношение ускорения образцового тела P к ускорению второго тела Q. Эта величина m называется *массой* тела Q. Пусть m' будет отношением ускорений, сообщаемых друг другу принятым за образец телом P и третьим телом R путем взаимного влияния. Закон наш в том виде, как он нами высказан, позволяет нам рассматривать лишь отношение ускорений, получаемых телами P и Q, или ускорений, полученных P и R при тех или других условиях их взаимного влияния, но он не дает нам ничего для нахождения отношения между ускорениями, сообщаемыми взаимно друг другу телами Q и R. Опыт, однако, снова выводит нас из этого затруднения, говоря, что если Q и R взаимно влияют друг на друга, то отношение ускорений, сообщаемых телам Q и R, равно *обратному* отношению m к m'. Если мы условимся массу нашего тела, принимаемого за образец, считать за единицу, то будем в состоянии высказать общее положение, а именно, что *взаимные ускорения обратно пропорциональны массам*. Таким образом, раз у нас будут определены массы тел, мы будем в состоянии, пользуясь изученным действием группы условий на *одно* тело, вычислить действие, производимое той же группой условий на какое-нибудь *другое* тело.

Читатель заметил, что масса определена выше, как некоторое отношение ускорений, то-есть только как некоторая числовая постоянная, выводимая для каких-либо двух тел опытным путем. Было найдено, что массы двух тел одного и того же однородного вещества пропорциональны об'емам этих тел. Это соотношение между массой и об'емом было источником многих неясностей. Нечто, не могущее быть определенным, названное *материей*, было приписано телам. Было предположено, что тела состоят из материи, наполняющей пространство, а масса тела определялась как количество материи, заключающейся в ней. Было введено далее новое понятие, названное *силой*: сила по предположению как бы находится в материи. Сила, с какой тело P действует на тело Q, масса которого равна m, есть величина, пропорциональная массе m тела Q и ускорению, сообщаемому движущемуся телу Q, благодаря присутствию тела P. Для читателя очевидно, что понятие силы выясняет вопрос о том, почему присутствие тела P сказывается в стремлении изменить скорость тела Q, лишь настолько, насколько понятие материи об'ясняет причину обратной пропорциональности ускорений массам. Привычка основываться в наших представлениях о движении на названиях „материя“ и „сила“ далеко не раз приводила к неясностям не только в математических построениях, но и в философском умозрении. Мы не знаем, *почему* присутствие одного тела сказывается в стремлении изменить скорость другого тела; сказать, что это обусловлено силой, присущей первому телу и действующей на материю движущегося тела, значит только скрыть наше незнание. Мы знаем всего на всего лишь то, что присутствие одного тела может обнаружиться в стремлении изменить скорость другого тела, и если это происходит, то изменение может быть удостоверено опытом и повинуется уже указанным законам.

Вычисление воздействия более сложной совокупности окружающих условий на сложное тело или систему тел выполняется при помощи законов движения, выведенных из наблюдений над действием простой совокупности условий на простое тело, и составляет особую задачу той отрасли точных наук, которая называется *прикладной математикой*.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

Предварительный очерк бикватернионов [1].

I.

Гамильтоновы *векторы* представляют собою величины, имеющие известный размер и направление, но не особое положение; вектор AB рассматривается как тожественный вектору CD, если он равен и параллелен CD и направлен в ту же сторону. Параллельное перенесение твердого тела может служить примером такой величины. Так как в этом случае все частицы тела проходят равные расстояния вдоль по параллельным прямым в одну и ту же сторону, то движение тела вполне характеризуется некоторой прямой определенной длины и направления, проведенной через любую точку. Пара, в свою очередь, может быть равнозначительно представлена вектором: действительно, осью пары может служить любая прямая, длина которой пропорциональна моменту пары, при чем такую прямую надо провести перпендикулярно к лицевой стороне плоскости пары.

Однако, для многих целей бывает необходимо рассматривать величины, имеющие не только те или иные размеры и направление, но также и определенное *положение*. Понятие о скорости вращения твердого тела связывается с некоторой определенной осью, и равные вращения около двух параллельных осей не эквивалентны друг другу. Сила, действующая на твердое тело, направлена всегда вдоль по некоторой определенной по положению прямой (по *линии действия*), и равные силы, действующие по параллельным прямым, разнятся на некоторую пару. Эта разница между двумя родами величин становится ясной при рассмотрении того геометрического исчисления, которым пользуются для изучения величин каждого такого рода. При изучении движений точки или при сложении пар из построений требуется только „многоугольник сил“: относящаяся сюда теория не выходит за пределы сложения векторов; но в статике и кинематике твердого тела нам необходимо в дополнение к этому еще построение „косого

---

[1]) Preliminary Sketch of Biquaternions, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. IV, p. 381—395; Mathem. Pap. by W. K. Clifford, p. 181—200.

многоугольника", а тут уже вносится теория инволюции прямых в пространстве или теория линейного комплекса.

Название *вектор* может быть с удобством сочетаемо с понятием о скорости *параллельного перенесения*, являющегося как бы простейшим представителем обозначаемых вектором величин. По аналогии с этим, я предложил бы воспользоваться названием *ротор* (мы так сокращаем слово *ротатор*) для обозначения величин, имеющих известные размер, направление и положение; простейшим представителем этих величин может служить скорость *вращения* (*rotation*) вокруг известной оси. Геометрически ротор будет представлен отрезком прямой, пропорциональной его размеру, отложенным по оси ротора и в определенную сторону. Ротор AB будет тожествен с ротором CD, если оба они находятся на одной и той же прямой, имеют одну и ту же длину и направлены в одну и ту же сторону; другими словами, вектор может быть перенесен куда угодно, лишь бы он оставался сам себе параллельным, ротор же можно переносить лишь вдоль его собственной оси.

Сложение роторов будет происходить по правилам, управляющим соединением сил в одну силу и сложением вращений. Но тут, однако, мы неожиданно наталкиваемся на одно весьма важное нарушение аналогии между роторами и векторами. В то время, как сумма какого-либо числа векторов будет всегда вектором, сумма роторов будет равна ротору только в особых случаях. В самом деле, сложение сил, *линии действия* которых не пересекаются, или сложение двух скоростей вращения, у которых не пересекаются оси, приводит в первом случае к системе сил, а во втором случае—к наиболее общему выражению скорости твердого тела. Изучением этих значительно более сложных величин уже занимались, и теория их сложения, или сочетания, воедино подробно разработана у Болла [1]).

Система сил может быть приведена одним способом к единственной силе P и к паре G, плоскость которой перпендикулярна к направлению действия силы, или *центральной оси*. Болл называет такую систему сил, *силовым винтом* [*wrench*] [2]), осью винта является при этом центральная ось, а параметр винта (*pitch*) [3]) равен отношению $\frac{G}{P}$, то-есть отношению пары к силе. Подобным образом скорость твердого тела может быть представлена только одним способом, а именно— в виде некоторой угловой скорости вращения ω вокруг известной оси в соединении с скоростью параллельного перенесения v вдоль по этой оси. Болл называет эту скорость *угловой скоростью* кинематического винта [twist velocity] [4]), при чем осью винта служит ось вра-

---

[1]) См. R. S. Ball, *Theory of screws*, 1-ое изд. [1876]; 2-ое изд. [Cambridge, 1900].

[2]) [3]) См. примечание в конце книги.

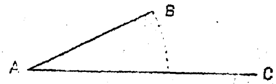
[4]) См. примечание в конце книги.

щения, а *параметр винта* равен отношению $\frac{c}{\omega}$, то-есть отношению скорости перенесения к скорости вращения. Винт является здесь лишь *геометрическим* образом, получающимся как результат сочетания *оси*, или прямой линии определенной по положению, с *параметром*, имеющим размер линейный. *Силовой винт* (wrench) есть сочетание этой геометрической формы с величиной того же размера, что и сила; скорость *кинематического винта* есть сочетание этого геометрического образа (винта) с величиной того же измерения, что и угловые скорости. Чрезвычайное удобство этой номенклатуры превосходно пояснено примерами в указанной нами выше замечательной работе.

Совершенно так же, как вектор (скорость параллельного перенесения оси пара) есть величина, связанная с направлением, ротор (скорость вращения или сила) есть величина, связанная с известной осью: таким образом, эта новая величина, представляющая собой сумму двух или более роторов (угловая скорость кинематического винта) или силовой винт, есть величина, связанная с некоторым винтом. Следуя аналогии, нами проводимой, я предлагаю назвать эту величину *мотором*; простейшим представителем таких величин будет общее движение твердого тела. И мы скажем, что в общем случае сумма роторов есть мотор, но в частных случаях сумма эта может выродиться (degenerate) в ротор или вектор.

II.

Кватернион представляет собой отношение двух векторов, или, иначе говоря, операцию, необходимую для превращения одного из них в другой. Пусть такими векторами будут AB и AC (черт. 101), так как исходной точкой для них всегда возможно сделать некоторую произвольную точку A. Вектор AB может быть превращен в AC посредством вращения его вокруг оси, проходящей через A и перпендикулярной к плоскости BAC, до тех пор, пока его направление не совпадает с направлением AC, и последующего затем увеличения или уменьшения его до той же длины, что и AC. Таким образом отношение двух векторов представляет собой сочетание обыкновенного числового отношения [1]) с *вращением*, или, как говорит Гамильтон, *кватернион* есть произведение *тензора* на *версор* [2]) Так как точка A совершенно произвольна, то это вращение совершается не вокруг какой-нибудь определенной оси; но оно вполне определенно, когда даны размеры угла поворота и направление его оси.



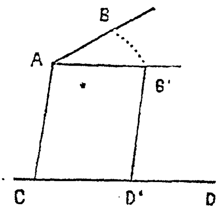
Черт. 101.

---

[1]) Клиффорд понимает здесь отношение, как некоторую операцию (см. текст, стр. 84). (*Примеч. переводчика*).

[2]) Tensor — растягивающий; versor — поворачивающий.

Этот кватернион $\frac{AC}{AB} = q$ [1]) означает, стало-быть, такую операцию, которая, будучи произведена над вектором AB, обращает его в AC, так что $q \,.\, AB = AC$. Ось кватерниона перпендикулярна плоскости BAC, а потому ясно, что наш кватернион, действуя на какой-нибудь другой вектор AD в этой плоскости, должен обратить его в четвертый вектор AE, находящийся в той же плоскости, при чем угол DAE будет равен углу BAC, а длины четырех векторов образуют пропорцию. Но кватернион может действовать *только* на вектор, перпендикулярный к его оси. Поэтому если вектор AF не находится в плоскости BAC, то выражение $q.\ AF$ не имеет решительно никакого смысла, хотя, правда, далее можно будет придать известный смысл выражению аналогичному, в *котором AF имеет уже не то значение.* Чрезвычайно важно, однако, отметить, что до тех пор, пока AF означает *вектор*, не перпендикулярный к оси q, выражение $q.\ AF$ не имеет решительно никакого смысла



Черт. 102.

Рассмотрим теперь, какая операция необходима для превращения одного *ротора* в другой. Существует прямая, пересекающая оси каких-либо двух роторов под прямым углом [2]), при чем часть ее представляет кратчайшее расстояние между ними (черт. 102). Пусть AC будет кратчайшим расстоянием между роторами AB и CD. Тогда AB может быть превращено в CD путем процесса, распадающегося на три следующих стадии. Во-первых, мы должны повернуть AB около оси AC, переведя его в положение AB', параллельное CD. Затем, посредством скольжения по этой оси мы переводим его в положение CD'. Наконец, увеличиваем или уменьшаем его в отношении CD' к CD. Первые две операции мы можем рассматривать, как образующие в совокупности кинематический винт, осью которого служит AC, а параметр равен отношению:

$$\frac{AC}{\text{размер угла } BAB' \text{ в радианах}}$$

Итак, отношение двух роторов есть сочетание обыкновенного числового отношения с *кинематическим винтом*. Этот кинематический

---

[1]) Профессор Кели (Cayley) при помощи чрезвычайно удобного обозначения различает (см. текст, стр. 45) $\left|\frac{AC}{AB}\right.$ и $\left.\frac{AC}{AB}\right|$ следующим образом: $AB \,.\, \left|\frac{AC}{AB}\right. = 1$, $\left.\frac{AC}{AB}\right| \,.\, AB = 1$. Я думаю, что было бы удобно посредством $\frac{x}{y}$ *всегда* обозначать операцию $\left.\frac{x}{y}\right|$, то-есть такую операцию, которая обращает y в x или, иначе говоря, такую операцию, которая следуя за операцией y, сводит оба действия к операции x.

[2]) См. также текст, стр. 161.

винт связывается с некоторым вполне определенным винтом (как геометрическим образом) и, лишь тогда будет он определенным, когда будут дан размер углового поворота и винт (стало-быть, направление, положение и параметр винта). Мы можем сказать, что подобно тому, как вращение (версор), включенное в кватернион, является отношением двух направлений, так кинематический винт (*twist*), заключающийся в отношении двух роторов, есть в сущности отношение осей роторов.

Тут опять приходится сделать заключение относительно пределов применимости этой операции. Пользуясь выражением *tensor-twist* для обозначения отношения двух роторов (представляющего и, в самом деле, кинематический винт, помноженный на некоторый тенсор), мы можем сказать, что tensor-twist может быть приложен к любому ротору, пересекающему его ось под прямым углом.

Пусть t обозначает операцию, которая обращает AB в CD, то-есть $t=\frac{CD}{AB}$, или $t\,.\,AB=CD$; если EF представляет собой другой ротор, пересекающий AC под прямым углом, то выражение $t\,.\,Ef$ будет иметь определенный смысл; а именно это произведение будет означать ротор, который получится путем скольжения EF по оси на протяжении отрезка, равного AC, путем поворота около AC на угол, равный BAB', и изменения длины EF в отношении $AB:CD$. Но если EF представляет собой ротор, не пересекающий AC или пересекающий AC под углом, отличным от прямого, то выражение $t\,.\,EF$ не будет означать ничего.

Итак, мы определили отношение двух роторов и показали, что, подобно кватерниону, операция эта имеет ограниченную область применения. Теперь естественно возникает следующий по порядку вопрос, а именно: при помощи какой операции один *мотор* обращается в другой мотор? Нам не трудно будет ответить на этот вопрос в том случае, когда у двух моторов один и тот же параметр винта, потому что тогда их отношение есть тот tensor-twist, для которого тенсор равен отношению размеров моторов, а кинематический винт—отношению их осей. Мы пришли к этому заключению, рассматривая каждый мотор как сумму двух роторов, которые не пересекаются. Пусть α и β будут двумя такими роторами, буквой t назовем *tensor-twist*, ось которого пересекает оба ротора под прямыми углами; тогда $t\alpha$ будет ротором, скажем, γ, а $t\beta$—другим ротором, скажем, δ. Если мы допустим закон распределительности, то получим, что

$$t(m\alpha+n\beta)=m\gamma+n\delta,$$

или

$$t=\frac{m\gamma+n\delta}{m\alpha+n\beta}.$$

Утверждение, что ось t пересекает под прямыми углами оси моторов $m\alpha+n\beta$ и $m\gamma+n\delta$ и что одна из этих осей переходит в другую при помощи того же кинематического винта, который обращает α в γ, а β—в δ, будет лишь простым применением известных уже теорем.

Решение этой задачи в общем случае, когда параметр винтов не одинаков, не так легко. Прежде всего мы должны вспомнить, что каждый мотор состоит из двух частей, в одну из которых входит ротор, в другую—вектор, и что параметр его определяется отношением этих частей. Поэтому, присоединяя к мотору соответственный вектор, мы можем получить какой угодно параметр, не изменяя той части мотора, в которую входит ротор. Пусть B' представляет собой такой мотор, у которого часть, заключающая ротор, такая же, как у мотора B, а параметр такой же, как у A; пусть $B = B' + \beta$, где β вектор, параллельный оси B. Тогда отношение $\frac{B}{A} = \frac{B'}{A} + \frac{\beta}{A'}$, но $\frac{B'}{A}$ есть *tensor-twist*, скажем, t; и потому мы можем написать, что

$$\frac{B}{A} = t + \frac{\beta}{A},$$

и нам остается только найти операцию, обращающую мотор A в вектор β.

Для осуществления этого мы должны ввести символ, характер и действие которого на первый взгляд представляются совершенно произвольными, однако ниже символ этот находит себе оправдание. *Наш символ ω, будучи приложен к какому-либо мотору, изменяет его в вектор, параллельный его оси и пропорциональный той части его, которая содержит ротор.* Другими словами, ω изменяет вращение вокруг оси в перенесение, параллельное этой оси, а силу превращает в пару, находящуюся в плоскости, перпендикулярной к направлению действия силы.

Но если вращение сопровождается некоторым параллельным перенесением или если сила сопровождается некоторой парой, то с этими придатками символ совершенно не считается и, будучи приложен прямо к вектору, обращает вектор в нуль. Отсюда следует, что действие символа ω, двукратно приложенного к мотору, обращает его в нуль, то-есть всегда $\omega^2 A = O$. Таким образом ту часть какого-нибудь выражения, которая содержит ω, мы должны рассматривать как бесконечно малую первого порядка; всеми же высшими порядками можно прямо пренебречь, не отличая их уже друг от друга.

Так как $\omega A = \alpha$, то-есть равно некоторому вектору, и отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ есть такой кватернион q, что $q\alpha = \beta$, то мы может написать последовательно:

$$\beta = q\alpha = q\omega A,$$

$$\frac{\beta}{A} = q\omega,$$

или, наконец, $\frac{B}{A} = t + q\omega$, то-есть *отношение двух моторов может быть выражено в виде суммы двух частей, одна из которых представляет собой tensor-twist, а другая—произведение ω на кватернион.*

То же самое отношение может быть выражено в другой форме. Пусть произвольная точка O принята за начало; тогда каждый мотор может быть представлен единственным способом в виде суммы ротора, проходящего через O и вектора. Теория роторов, проходящих через определенную точку, совершенно одинакова с общей теорией векторов, и отношение двух роторов есть не что иное, как *tensor-twist*, параметр которого равен нулю, или, что то же самое, кватернион, ось которого непременно должна проходить через определенную точку. Если мы будем пользоваться для обозначения роторов, проходящих через известное начало, курсивными греческими буквами (α, β), то векторы от них мы можем отличать, ставя перед ними символ ω, таким образом $\omega\alpha$ должно означать вектор параллельный и пропорциональный ротору α. Отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ есть в таком случае кватернион, который в то же время равен отношению $\frac{\omega\beta}{\omega\alpha}$ [1]). Общим выражением для мотора будет тогда $\alpha+\omega\beta$. Пусть теперь требуется найти отношение двух моторов $\alpha+\omega\beta$, $\gamma+\omega\delta$, то-есть значение выражения

$$\frac{\gamma+\omega\delta}{\alpha+\omega\beta}.$$

Положим сперва, что $\frac{\gamma}{\alpha}=q$; тогда $q(\alpha+\omega\beta)=\gamma+q\omega\beta=\gamma+\omega q\beta$.

Символ $q\beta$ в настоящем случае не имеет геометрического значения, так как роторы α, β, γ, вообще говоря, не лежат в одной и той же плоскости (не компланарны), и потому к ним не может быть прилагаем один и тот же кватернион q. Если же мы разложим все эти величины (как это делается в исчислении кватернионов) по трем взаимно перпендикулярным роторам, каждый из которых равен единице и проходит через общее начало, то $\frac{\delta-q\beta}{\alpha}$ представит собой вполне определенный кватернион r.

Уравнение

$$r\alpha=\delta-q\beta, \text{ подобно уравнению } q(\alpha+\omega\beta)=\gamma+\omega q\beta,$$

имеет чисто буквенный характер и лишено смысла. Но если мы (вспомнив свойства символа ω) умножим первое уравнение на ω, это произведение прибавим ко второму уравнению и допустим применение распределительного закона, то получим, что

$$(q+\omega r)\,(\alpha+\omega\beta)=\gamma+\omega\delta.$$

---

[1]) Отсюда следует, что $\omega q=q\omega$, то-есть, что для символа ω и кватернионов имеет силу закон перестановительности.

Таким образом, отношение $\frac{\gamma+\omega\delta}{\alpha+\omega\beta}$ выражается в форме $q+\omega r$, а это выражение было бы удобно назвать *бикватернионом* [1]. Конечное уравнение, однако, нельзя истолковывать в том же смысле, как уравнение $q\alpha=\gamma$. Выражение $q+\omega r$ не представляет собой суммы таких операций, которые могли бы быть приложены к мотору $\alpha+\omega\beta$, как нечто целое; отношение двух моторов выражено лишь символом, представляющим собой сумму двух частей, каждая из которых в отдельности имеет определенное значение в некоторых других случаях, но не в рассматриваемом случае. В дальнейших соображениях эту трудность нам удастся отчасти преодолеть, показав, что система, здесь очерченная, является предельным случаем другой системы, в которой этой трудности уже не существует.

Освещению предшествующих замечаний может способствовать следующая понятная после того, что было сказано, таблица:

Геометрический образ.	Величина.	Пример.	Отношение.
Направление на прямой.	Вектор на прямой.	Сложение или вычитание.	Отношение, имеющее знак.
Направление на плоскости.	Вектор на плоскости.	Комплексная величина.	Отношение, представленное комплексным числом.
Направление в пространстве.	Вектор в пространстве.	Параллельное перенесение; пара.	Кватернион.
Ось.	Ротор.	Скорость вращения; сила.	Кинематический винт.
Винт.	Мотор.	Скорость кинематического винта (twist-velocity) [2]; система сил.	Бикватернион.

III.

Геометрию пространства трех измерений, согласующуюся с постулатами Евклида, Клейн называет *параболической геометрией* пространства, в отличие от двух других разновидностей пространства, в которых допускается наличность — в первой положительной, во второй — отрицательной кривизны. Клейн называет первую из них *эллиптиче-*

---

[1]) *Бикватернион* Гамильтона представляет собой кватернион с комплексными коэффициентами; но удобно предположить (как это указывает проф. Peirce) с самого же начала, что все скалярные величины—величины комплексные. Так как, благодаря этому, мы уже не нуждаемся в слове „бикватернион“ в его старом значении, то я беру на себя смелость использовать его в новом его смысле.

[2]) См. примечание в конце книги, относящееся к стр. 204.

ской геометрией пространства, вторую геометрией *гиперболической*. Исследования, приводимые нами дальше, включают в себе постулаты эллиптической геометрии. Так как одного постулата наличности повсюду положительной кривизны для определения этой геометрии недостаточно, то следует уделить здесь немного места об'яснению характера этой геометрии.

Пространство трех измерений представляет собой такое пространство, точки которого могут быть связаны с той или другой системой значений трех переменных x, y, z. Вообще говоря, невозможно сделать эту зависимость такой, чтобы каждой системе значений этих переменных соответствовала, вообще говоря, одна точка, и чтобы каждой точке соответствовала в общем случае одна только система значений. Если же последнее имеет место, то такое пространство называется *уникурсальным*. *Алгебраическим* пространством называется такое, в котором положение точки может быть единственным способом определено при помощи совокупности значений периодических алгебраических интегралов, за вычетом исключений, образующих известную часть пространства. Таким образом уникурсальные пространства представляют собой частный случай пространств алгебраических. Обращаясь теперь лишь к уникурсальным пространствам, мы должны заметить, что, вообще говоря, усматриваются исключения из этой единственности соответствия точек и систем значений; а именно имеются такие точки, каждой из которых соответствует бесконечно-большое число значений координат, удовлетворяющих известному уравнению или известным уравнениям; с другой стороны, существуют такие системы значений, которым соответствуют в пространстве не точки, но геометрические места. Указание этих уравнений, связанных с известными точками геометрических мест, связанных с некоторыми системами значений, а также зависимости тех и других по отношению друг к другу, ведет к определению *проективного соответствия* изучаемого пространства; раз эти все зависимости известны, проективная геометрия такого пространства может быть разработана во всем ее об'еме.

В уравнениях (выражающих некоторые точки) и системах значений (отвечающих некоторым геометрическим местам) коэффициенты или самые переменные могут иметь мнимые значения, могут и не иметь таких значений, но, как бы то ни было, эти значения надо принимать в расчет. Точки, соответствующие системам действительных значений, называются действительными точками, точки же, соответствующие системам значений мнимых, *мнимыми*: изучение последних, которое, строго говоря, не входит в круг исследования пространства трех измерений, предпринимается только ради первых значений.

Геометрические места, соответствующие линейным уравнениям между координатами, мы можем теперь называть *плоскостями*, а их пересечение—прямыми *линиями*. Это определение чисто проективное, и такие геометрические места не должны непременно быть плоскостями *плоскими* или линиями *прямыми* в метрическом смысле. Точки, линии и плоскости могут быть названы общим именем *элементов.*

Метрическая геометрия пространства [1]) есть теория проективных соответствий между известными определенными геометрическими формами и всеми другими геометрическими формами, или, иначе говоря, есть теория инвариантных отношений известных определенных алгебраических форм и всех других алгебраических форм. Термин *степень* будет раз'яснен позже, поскольку это будет нужно; теперь же скажем только то, что эти определенные формы (в совокупности называемые *абсолютом*) заданы, раз мы будем знать точки, прямые и плоскости абсолюта, или, как говорят, элементы абсолюта. *Степень* элемента абсолюта, по сравнению с каким-нибудь произвольным элементом, бесконечно велика. Другими словами, нам *нужны* общие уравнения абсолюта в координатах точечных, линейных и плоскостных.

Уникурсальное пространство, точки которого могут быть представлены единственным способом при помощи систем значений x, y, z (не исключая и тех, которые могут быть рассматриваемы, как уравнения точек, а также систем значений, соответствующих геометрическим местам), называется *линейным* пространством. Но это только проективное определение, оставляющее неопределенным абсолют, а, стало-быть, и все содержание метрической геометрии.

Для абсолюта в линейном пространстве существует одна особенная форма, имеющая чрезвычайно важное значение. Это тот случай, когда точки абсолюта расположены по некоторой поверхности второго порядка, прямые же и плоскости абсолюта касаются этой поверхности, иначе говоря, это то пространство, в котором три уравнения абсолюта будут уравнениями второй степени. Рассмотрению подлежат следующих три случая [2]), в которых только и приходится иметь дело с изучаемым нами пространством:

1) *Эллиптическая* геометрия; в ней все элементы абсолюта мнимы.

2) *Гиперболическая* геометрия; здесь абсолют не содержит действительных прямых линий и окружает нас; в этом случае действительные точки, расположенные по другую сторону поверхности, называются *идеальными.*

3) *Параболическая* геометрия; тут сказанная поверхность переходит в мнимое коническое сечение на действительной плоскости. Точками абсолюта будут точки, находящиеся на (действительной) плоскости этого конического сечения; прямыми же и плоскостями

---

[1]) Эта теория метрической геометрии предложена проф. Кели (Cayley) в его „*Sixth memoir on quanties*", *Phil. Trans.*, v. 149, 1859.

[2]) Об этом подразделении см. Клейн „Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie", *Mathem Annalen*, Bd. 4. Второй случай представляют геометрии Лобачевского и Больян.

будут мнимые прямые и плоскости, при чем первые пересекают коническое сечение, а вторые касаются его.

Во всем последующем мы должны будем держаться *первого* из этих трех предположений; поэтому здесь уместно будет изложить, в чем это предположение состоит.

1) Мы принимаем рассматриваемое пространство за такое, в котором, без каких бы то ни было исключений, каждой совокупности значений координат x, y, z соответствует единственная точка, и каждой точке—единственная совокупность значений x, y, z.

2) Для этого пространства существует некоторая поверхность второго порядка, называемая абсолютом, все точки которой и все касательные плоскости—мнимы. Если прямая, соединяющая a и b, пересекает абсолют в i и j, то величина:

$$\frac{ab \,.\, ij}{\sqrt{(ai \,.\, aj \,.\, bi \,.\, bj)}} = \overline{ab}$$

(представляющая собой функцию ангармонических отношений, а следовательно, функцию инвариантную) называется *степенью* точек a и b по отношению друг к другу, или степенью одной из них по отношению к другой. *Расстояние* между этими точками есть такой угол θ, для которого $Sin\theta = ab$.

Подобным образом, если через линию пересечения плоскостей A и B провести к абсолюту касательные плоскости I и J, то степень плоскостей A, B по отношению друг к другу есть величина

$$\frac{AB \,.\, IJ}{\sqrt{AI \,.\, AJ \,.\, BI \,.\, BJ}} = \overline{AB},$$

и угол φ между этими плоскостями таков, что

$$Sin\varphi = AB.$$

3) Если две точки являются сопряженными по отношению к абсолюту, то они отстоят друг от друга на *квадрант;* если сопряженными по отношению к абсолюту являются две прямые или плоскости, то они образуют друг с другом прямые углы. Таким образом все точки, находящиеся на расстоянии квадранта от данной точки, расположены на полярной плоскости этой последней по отношению к абсолюту. Каждая прямая имеет по отношению к абсолюту свою полярную линию, при чем каждая точка на полярной прямой отстоит на квадрант от каждой точки данной линии, и каждая прямая, перпендикулярная к одной из двух сказанных линий, пересекает другую. Чрез произвольную точку, вообще говоря, может быть проведена только *одна* прямая, перпендикулярная к данной плоскости, а именно—прямая, соединяющая взятую точку с полюсом плоскости. Если же эта точка и будет полю-

сом плоскости, то каждая прямая, через нее проведенная, перпендикулярна к плоскости. Подобным образом из точки, не лежащей на поляре данной прямой, может быть проведен один единственный перпендикуляр к этой линии, а именно—прямая, проходящая через взятую точку и пересекающая данную линию и ее поляру.

4) *Вообще говоря, всегда можно провести две такие прямые линии, которые пересекали бы две данные прямые под прямыми углами, при чем эти линии будут служить по отношению друг к другу полярами.* Одна из этих прямых может поэтому быть превращена в другую посредством вращения вокруг двух полярных осей. Эти осй определяются как такие прямые, которые пересекают две данные линии и их поляры. Если мы будем непрерывно перемещаться по одной из этих линий и проводить перпендикуляры к другой, то одна из этих осей будет определять наименьшее (кратчайшее) расстояние между линиями, а другая—наибольшее. Если эти длины друг другу равны, то линии отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии по всей своей длине. Таким образом, тут *мы имеем дело с исключением, а именно—с тем случаем, когда две прямые и их поляры принадлежат к одной и той же системе производящих гиперболоида; прямые тогда отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии по всей своей длине и пересекают две одни те же производящие одной системы абсолюта.* Я буду пользоваться словом *параллельный* для обозначения двух линий, расположенных таким образом; такие линии будут называться *право*параллельными и *лево*параллельными, в зависимости от того, превращается ли одна в другую при помощи правого или левого кинематического винта. Через произвольную точку может быть проведена по отношению данной прямой одна правопараллельная линия и одна левопараллельная; угол между этими параллельными равен удвоенному расстоянию точки от линии. Можно во многих отношениях провести аналогию между *параллельными*, которым мы дали здесь определение, и параллельными параболической геометрии. Так, например, если прямая пересекает две параллельные, то она образует с последними равные углы; ряд параллельных линий, пересекающих данную линию, образует построенную по некоторому закону поверхность с кривизной, равной нулю. Геометрия этой поверхности та же, что и у конечного параллелограмма, противоположные стороны которого рассматраваются как тожественные.

5) Необходимо признать, что скорость кинематического винта твердого тела имеет *две* оси. В самом деле, движение при параллельном перенесении вдоль по какой-нибудь оси представляет собой то же самое, что вращение вокруг полярной оси, и наоборот. Отсюда следует, что скорость кинематического винта слагается из скоростей вращения вокруг двух полярных осей; пусть скорости эти будут θ и φ. Тогда мы можем движение рассматривать, либо как совершающееся

со скоростью некоторого кинематического винта, параметр которого равен $\frac{\rho}{\theta}$, а осью служит первая ось, или же по такому винту, параметр которого $\frac{\theta}{\rho}$, осью же является полярная ось. Мотор в общем случае, значит, имеет две оси и как сумма двух роторов может быть выражен лишь одним способом. Но есть один случай, где, как исключение, оси мотора оказываются неопределенными; это тот случай, когда оба полярных ротора по размерам равны [1]). Если твердое тело испытывает одновременно некоторое вращение вокруг оси и равное вращению перенесение вдоль по ней, то все точки тела описывают параллельные прямые, и движение тела есть вращение около одной из этих линий и в то же самое время перенесение вдоль по этой линии. Такое движение может быть равнозначительно представлено прямой данной длины, проведенной через какую-нибудь точку параллельно данной прямой. Мотор, имеющий параметр единицу, то-есть такой, который сам себе полярен, можно в силу этого рассматривать, как обладающий характером *вектора*, и мы в дальнейшем будем его называть этим именем. В самом деле, мы можем определить вектор, как мотор, оси которого неопределенны; случай, теперь рассматриваемый нами, является единственным случаем неопределенности в эллиптической геометрии. Векторы будут называться *правыми* или *левыми* в зависимости от того, будет ли соответствующий им кинематический винт *правым* или *левым*.

Предложение: *Каждый мотор есть сумма правого и левого векторов*. Действительно, пусть A какой-нибудь мотор, A'—полярный мотор; тогда $A=\frac{1}{2}(A+A')+\frac{1}{2}(A-A')$, где $A+A'$ и $A-A'$ моторы, параметр которых равен единице, при чем один из них правый, другой—левый.

IV.

Пусть через некоторую неподвижную точку, принятую за начало, проведены три взаимно перпендикулярные прямые и на них, как на осях, взяты три ротора, равные единице, обозначенные символами i, j, k. Тогда каждый ротор, проходящий через начало, будет определяться выражением вида $ix+jy+kz$, где x, y, z скалярные величины, или же отношения величин, имеющих размеры. Символы i, j, k будут иметь также и другое значение, а именно—каждый из них будет означать вращение вокруг его оси на прямой угол какого-либо ротора, пересекающего эту ось под прямым углом. Операции эти в приложении их к роторам, проходящим через начало, удовлетво-

[1]) Это движение описано по другому поводу Клейном и Ли (*Mathem. Annal*, Bd. 4); оно представляет преобразование абсолюта в самого себя, при котором две производящие остаются неизменными.

ряют, согласно обычным правилам исчисления кватернионов, уравнениям $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$; не трудно видеть, что эти же самые уравнения остаются в силе и в том случае, когда эти операции производятся над роторами, не проходящими через начало. Сложный символ $ix+jy+kz$ будет также иметь аналогичное второе значение, а именно: в этом значении он будет показывать вращение на прямой угол около оси того ротора, который определяется тем же символом в его первом значении [1],—вращение, сопровождаемое тензором $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Эта операция может быть приложена только к тем роторам, которые пересекают указанную нами ось под прямым углом. Раз это так, то отношение каких-нибудь двух роторов, проходящих через начало, есть кватернион, скажем, формы $q=w+ix+jy+kz=w+\rho$. Ось ρ этого кватерниона перпендикулярна к плоскости двух роторов. Если α есть ротор, проходящий через начало, а q кватернион, то произведение $q\alpha$ может быть образовано согласно гамильтоновым правилам умножения и, вообще говоря, есть некоторый кватернион r. В этом случае уравнение $q\alpha=r$ может найти истолкование только при понимании α в его *втором* значении; словами такое положение вещей может быть передано следующим образом: если над каким-нибудь ротором могут быть последовательно выполнены операции, обозначаемые версором α, вращающим под прямым углом, и кватернионом q, то при этом конечный результат будет тот же, как если бы к взятому ротору сразу была приложена операция, обозначенная кватернионом r. Если, однако, оси q и α образуют друг с другом прямой угол, то скалярной части в r нет, и мы можем написать указанное уравнение так: $q\alpha=\rho$.

Теперь наше уравнение можно истолковать в его *первичном* смысле, а именно: кватернион q, действуя на ротор α, дает в результате ротор ρ. В этом случае не теряет силы и *второе* истолкование.

При таких условиях обе части уравнения

$$(q+r)s=qs+rs$$

(где q, r, s кватернионы) имеют всегда одно и то же значение, если их можно как-либо истолковать, а это все равно, что сказать, что на наши символы распространяется распределительный закон.

Отношение двух роторов, которые не пересекаются, есть кинематический винт, в общем случае имеющий вполне определенные оси. Если же роторы взаимно полярны, то положение осей кинематического винта неопределенно: каждая прямая, пересекающая оба ротора, пересекает их под прямым углом и потому может служить их осью. Поэтому всегда возможно найти такой кинематический винт, который одновременно обращал бы два данных ротора в полярные с ними роторы; два кинематических винта с параметром, равным 1 или -1,

---

[1] См. начало параграфа.

имеют пару общих роторов, на которые они могут действовать и которые они превращают один в другой; отсюда мы можем сообразить, что *все кинематические винты, обусловливающие поворот под прямым углом и обладающие притом параметром, равным единице, взаимно эквивалентны; взаимно также эквивалентны все кинематические винты, обусловливающие поворот под прямым углом, при параметре, равном* — *1*.

Кинематический винт, обусловливающий поворот под прямым углом и имеющий параметр, равный единице, мы будем обозначать символом ω; выражение $\omega\alpha$ будет означать ротор полярный α и равный ему по величине, получаемый из него при помощи левого кинематического винта. Все время, пока происходит операция, обусловливаемая этим кинематическим винтом, каждая точка ротора описывает прямую; поэтому, если действие кинематического винта будет распространено на два прямых угла, то ротор возвратится в свое первоначальное положение, *не претерпев* обращения, а потому

$$\omega^2 = 1.$$

Каждый мотор может быть представлен в виде суммы двух роторов, один из которых проходит через начало, а другой полярен ротору, проходящему через начало. Поэтому общее выражение для мотора будет иметь вид

$$\alpha + \omega\beta.$$

Оно представляет *ротор* в том случае, когда два составляющие его ротора пересекаются или каждый из них перпендикулярен к полярному ротору другого, то-есть когда $S\alpha\beta = 0$.

Положим, что

$$\xi = \frac{1+\omega}{2},\ \eta = \frac{1-\omega}{2};$$

$$\xi^2 = \frac{1+2\omega+\omega^2}{4} = \frac{2+2\omega}{4} = \xi\ ^{1)},$$

$$\eta^2 = \frac{1-2\omega+\omega^2}{4} = \frac{2-2\omega}{4} = \eta,$$

$$\xi\eta = \frac{1-\omega^2}{4} = 0.$$

Каждый мотор $\alpha + \omega\beta$ может быть таким образом выражен в форме $\xi\gamma + \eta\delta$. Ясно, что $\xi\gamma$ есть право-векториальная часть этого мотора, а $\eta\delta$ лево-векториальная часть. Если мы умножим $\xi\gamma + \eta\delta$ на ξ, то в результате получится только $\xi\gamma$; значит, действие умножения на ξ мотора α сводится лишь к выделению его право-векториальной части, а потому таким образом символы ξ и η являются в известном смысле символами *отбора*, аналогичными символам S и V в исчислении кватернионов [2]).

---

[1]) $\omega^2 = 1$; поэтому $1+\omega^2=2$; $1-\omega^2=0$. [*Прим. перев.*].

[2]) См. примечание в конце книги.

Отношение двух моторов. Теперь мы можем уже прямо перейти к нахождению операции, обращающей один мотор $\xi\gamma+\eta\delta$ в какой-нибудь другой $\xi\alpha+\eta\beta$.

Действительно, если мы выполним операцию

$$\left(\xi\frac{\alpha}{\gamma}+\eta\frac{\beta}{\delta}\right)(\xi\gamma+\eta\delta),$$

имея в памяти законы умножения ξ и η, то получим в результате $\xi\alpha+\eta\beta$.

Если

$$\frac{\alpha}{\gamma}=q;\ \frac{\beta}{\delta}=r,$$

то мы можем написать, что

$$\frac{\xi\alpha+\eta\beta}{\xi\gamma+\eta\delta}=\xi\frac{\alpha}{\gamma}+\eta\frac{\beta}{\delta}=\xi q+\eta r,$$

то, в свою очередь, может быть написано [1]) в форме

$$\frac{q+r}{2}+\omega\frac{q-r}{2}=s+\omega t,$$

показывающий, что *отношение двух моторов есть бикватернион.*

Мотор $\xi\alpha+\eta\beta$ будет *ротором*, если

$$S(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=0,$$

или если

$$T\alpha=T\beta.$$

Отсюда легко видеть, что бикватернион $\xi q+\eta r$ будет *кинематическим винтом*, или отношением двух роторов при $Tq=Tr$.

V.

1. *Ротор, определяющий положение точки.* Пусть координаты точки по отношению к основному тетраэдру 1234 будут x_1, x_2, x_3, x_4, тогда уравнение абсолюта представится в форме $\Sigma x^2=0$. Ротор, проведенный из начала (точка 4), будет иметь вид

$$i_1\frac{x_1}{x_4}+i_2\frac{x_2}{x_4}+i_3\frac{x_3}{x_4},\ \text{или}\ \Sigma ik\frac{x_k}{x_4}\ (k=1,\ 2,\ 3).$$

где i_1, i_2, i_3 — роторы на ребрах театраэдра от начала до середины ребра. Тенсором этого ротора будет тангенс углового расстоя-

[1]) На том основании, что $\xi=\frac{1+\omega}{2}$ η, $\frac{1-\omega}{2}$.

ния от начала до точки, которую оно представляет. В самом деле, если

$$\rho = i_1 \frac{x_1}{x_4} + i_2 \frac{x_2}{x_4} + i_3 \frac{x_3}{x_4};$$

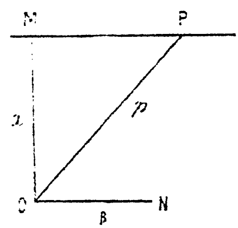
$$(T\rho)^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_4^2} = tan^2 \widehat{ox}, \text{ где } o \text{ начало.}$$

Угловое расстояние от начала до точки имеет бесконечно большое число значений, отличающихся на кратные π. Если поэтому рассматривать такое угловое расстояние как длину ротора, то ротор точки может быть определен только таким уравнением, как $\rho = \alpha$ (мод π_α). Для того, чтобы избегнуть этой неопределенности, нужна однозначная уникурсальная функция с периодом π; тангенс углового расстояния этим свойством вполне обладает.

2. *Уравнение прямой линии.* Пусть OM (черт. 103) перпендикуляр, опущенный из начала O на прямую линию MP; ON перпендикуляр к OM в плоскости MOP. Тогда из треугольника MOP получаем

$$\frac{\tan\, OM}{\tan\, OP} = \cos OP,$$

или, если $OM = \alpha$, $OP = \rho$, $ON = \beta$; $T\alpha = T\rho$ $\cos\, MOP$, так что α является слагающей ρ в направлении OM, откуда $\rho = \alpha + \beta x$, где x есть некоторый скаляр.



Черт. 103.

Изменяя x, мы получим все точки на линии MP. Но если α_1 есть *какое-нибудь* частное значение ρ, то уравнение может быть написано как раз в форме $\rho = \alpha_1 + \beta x$,

где теперь α_1 не должно быть непременно перпендикулярно к β.

Эта форма может быть приведена к предыдущей следующим образом: Для нахождения перпендикуляра из O, полагаем $\delta\ T\rho = 0$, откуда

$$S\alpha_1\beta + \beta^2 x = 0,$$

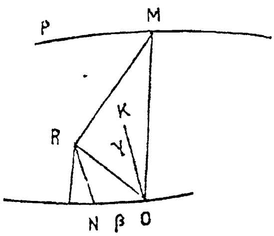
вследствие чего уравнение принимает вид

$$\rho = \alpha_1 - \beta S \frac{\alpha_1}{\beta} - \beta x, \text{ где}$$

$$\alpha_1 - \beta S \frac{\alpha_1}{\beta} = \alpha \text{ прежнего уравнения.}$$

3. *Ротор на прямой линии, уравнение которой дано.* Пусть OR (черт. 104) ротор, проведенный через начало прямой параллельной MP. Тогда $\angle NOR = OM$. Пусть OK перпендикуляр к ON и OM, длина которого такова, что $\dfrac{\tan\, OK}{\tan\, ON} = \tan\, NOR$.

Если $\gamma = OK$; $OR = \beta + \gamma$, то $\frac{T\gamma}{T\beta} = T\alpha$; $U\gamma = U\alpha\beta$, так как γ перпендикулярна к α и β. Так что $\gamma = \alpha\beta$; если далее R ротор, имеющий осью MP, а m скаляр, то *правый вектор* $R = \xi R = m\xi(\beta + \gamma) = m\xi(\beta + \alpha\beta)$, *левый вектор* $R = \eta R = m\eta\ (\beta - \gamma) = m\eta\ (\beta - \alpha\beta)$:



Черт. 104.

Поэтому:

$$R = m(\beta + \omega\alpha\beta).$$

Если R имеет ту же длину, что и β, то мы получим

$$\beta^2 = R^2 = m^2(\beta^2 + \alpha\beta^2) = m^2\beta^2(1 - \alpha^2),$$

а потому

$$R = \frac{\beta + \omega\alpha\beta}{\sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

Обратно, уравнение оси ротора $\gamma + \omega\delta$ имеет вид

$$\rho = \frac{\delta}{\gamma} + \gamma x,$$

конечно, в том случае, когда $\rho = \alpha + \beta x$, где $S\alpha\beta = 0$. В общем же случае мы должны написать уравнение в форме

$$\rho = \alpha - \beta S\frac{\alpha}{\beta} + \beta x,$$

откуда

$$R = \frac{\beta + \omega\left(\alpha - \beta S\frac{\alpha}{\beta}\right)\beta}{\sqrt{1 - \alpha^2 + \beta^2 S^2\frac{\alpha}{\beta} + 2S\alpha\beta S\frac{\alpha}{\beta}}} =$$

$$= \frac{\beta + \omega V\alpha\beta}{\sqrt{1 + S\alpha\beta S\frac{\alpha}{\beta} - \alpha^2}}.$$

4. *Ротор ab, соединяющий точки, положение которых определяется роторами* α *и* β.

Уравнение этого ротора:

$$\rho = \alpha + (\beta - \alpha)x.$$

откуда

$$mR = \beta - \alpha + \omega V\beta\alpha.$$

Если a_1, a_2, a_3, a_4; b_1, b_2, b_3, b_4 координаты этих точек, то $(TR)^2 = \tan^2\ ab = \frac{\Sigma(a_h b_k - a_k b_h)^2}{(\Sigma a_h b_h)^2} = -\frac{(\alpha - \beta)^2 + (V\alpha\beta)^2}{(1 - S\alpha\beta)^2},$

поэтому

$$R = \frac{(\beta - \alpha) + \omega V\alpha\beta}{1 - S\alpha\beta}$$

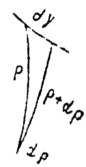
Прим. Если ρ (черт. 105) ротор точки, положение которой на кривой переменно, $d\lambda$ ротор по касательной, при чем его длина равна дуге кривой между ρ и $\rho + d\rho$, то

$$d\lambda = \frac{d\rho + \omega V\rho d\rho}{1 - \rho^2}.$$

5. *Ротор, параллельный β и проходящий через точку, положение которой определяется ротором α.*

Общее уравнение прямой, проходящей через точку α: $\rho = \alpha + \lambda c$, где λ произвольный ротор, проходящий через начало. Ротор, имеющий осью эту линию, будет $\lambda + \omega V\alpha\lambda$; если он *право*параллелен β, то

$$\begin{aligned} \xi(\lambda + V\alpha\lambda) &= \xi\beta \\ \lambda + V\alpha\lambda &= \beta \end{aligned} \quad (\xi\omega = \xi).$$



Черт. 105.

Прилагая операцию $S\alpha$ (так как $S.\alpha V\alpha\lambda = 0$), получаем, что

$$S\alpha\lambda = S\alpha\beta,$$

откуда, путем сложения, находим $\lambda + \alpha\lambda = \beta + S\alpha\beta$,

$$\text{и } \lambda = (1 + \alpha)^{-1}(\beta + S\alpha\beta) = \beta - (1 + \alpha)^{-1}\, V\alpha\beta.$$

Искомый ротор $\lambda + \omega V\alpha\lambda$ или $\lambda + \omega(\beta - \lambda)$, что дает

$$\beta - (1 + \alpha)^{-1} V\alpha\beta + \omega(1 + \alpha)^{-1} V\alpha\beta = \beta - 2\eta(1 + \alpha)^{-1} V\alpha\beta.$$

Вместо того, чтобы прилагать к уравнению $\lambda + V\alpha\lambda = \beta$ операцию $S\alpha$, мы могли бы применить операцию $V\alpha$ и получить, что

$$V\alpha\lambda + \alpha V\alpha\lambda = V\alpha\beta, \text{ так как } V.\alpha V\alpha\lambda = \alpha V\alpha\lambda;$$

поэтому

$$\begin{gathered} V\alpha\lambda(1 + \alpha)^{-1} V\alpha\beta, \\ \lambda = \beta - V\alpha\lambda = \beta - (1 + \alpha)^{-1} V\alpha\beta. \end{gathered}$$

Подобным образом ротором *лево*параллельным ротору β будет

$$\lambda = \beta + (1 - \alpha)^{-1} V\alpha\beta,$$

и ротор представится в виде $\lambda + \omega(\lambda - \beta) =$

$$\begin{gathered} = \beta + (1 - \alpha)^{-1} V\alpha\beta + \omega(1 - \alpha)^{-1} V\alpha\beta = \\ = \beta + 2\xi(1 - \alpha)^{-1} V\alpha\beta. \end{gathered}$$

ПРИМЕЧАНИЯ.

К стр. 121. Мы можем присвоить общее название скаляров всем положительным и отрицательным числам (то-есть действительным числам обычной алгебры): причиной этого будет то обстоятельство, что все такие числа могут быть представлены или расположены на некоторой общей, но бесконечной скале, простирающейся от $-\infty$ до $+\infty$, то-есть от отрицательной до положительной бесконечности.

К стр. 149. Тенсором называется положительное или, точнее говоря, не имеющее знака число рациональное или иррациональное, служащее для обозначения операции увеличения (растяжения) или уменьшения данной длины до тех или иных размеров. Таким образом удвоение прямой, разделение ее пополам и изменение ее длины, если принять ее за сторону квадрата, до размеров диагонали того же квадрата, будут операциями, указываемыми соответственно следующими тремя тенсорами: целым числом 2, дробью $\frac{1}{2}$ и иррациональным числом $\sqrt{2}$.

К стр. 217. Гамильтон представляет операцию, обозначаемую посредством кватерниона (q), с одной стороны, как произведение тенсора (Tq) на версор (Uq), т.-е. как произведение растяжения на поворотный множитель, с другой же стороны, как сумму некоторого скаляра (s) и некоторого вектора (v); отсюда $q = Tq \cdot Uq$ или $q = s + v$. Буквами S и V Гамильтон обозначает операции отбора, посредством которых из кватерниона выделяется его скалярная или векторная часть; поэтому:

$$Sq = S(s+v) = s;\ V(q) = V(s+v) = v;\ SVq = Sv = O,\ VSq = Vs = O.$$

К стр. 204. Параметром (pitch) винта называется прямолинейное расстояние, на которое передвигается гайка вдоль по оси винта этой гайки на угол, равный одной радиане. Параметр поэтому является величиной линейной[1]).

К стр. 204. Говорят, что телу сообщен кинематический винт или винтовое перемещение (twist), когда оно равномерно вращается вокруг оси винта и в то же время равномерно переносится параллельно оси винта на расстояние, равное произведению параметра (pitch) винта на угол поворота, выраженный в радианах.

К стр. 204. Известно, что система сил, приложенных к твердому телу, вообще говоря, может быть выражена некоторой силой и парой, плоскость которой перпендикулярна этой силе.

Мы употребляем выражение силовой винт (wrench) для обозначения совокупности силы и пары сил в плоскости, перпендикулярной к этой силе (4).

---

[1]) R. S. Ball. A treatise on the theory of Screws, p. 7. (2 издание, Cambridge, 1900).

СОДЕРЖАНИЕ.

ГЛАВА I.

Число.

ГЛАВА II.

Пространство.

ГЛАВА III.

Величина.

Стр.

ГЛАВА IV.

Положение.

ГЛАВА V.

Движение.

ПРИЛОЖЕНИЕ.